LA STATIQUE GRAPHIQUE

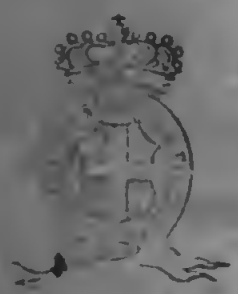
ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS;

PAR

M. MAURICE LEVY,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES, DOCTEUR ÈS SCIENCES.



TEXTE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1874

LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS.

Digitized by Google

5.8.605

LA STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS;

PAR

M. Maurice LEVY,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES, DOCTEUR ÈS SCIENCES.

TEXTE:

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER

Quai des Augustins, 55.

1874

Tous droits réservés.

Digitized by Google

INTRODUCTION.

I. — Notice historique sur la Statique graphique.

§ 1.

La Statique graphique a pour objet de remplacer, dans les applications, dans celles surtout qui se rattachent à l'art de l'ingénieur, les calculs laborieux de la Statique ordinaire, par des constructions géométriques simples et n'exigeant, pour la plupart, d'autre connaissance mécanique que celle du parallélogramme des forces.

§ 2.

En Statique ordinaire une force est représentée par une longueur qui fait connaître tout à la fois la grandeur, la position et le sens de la force.

La Statique graphique tire son caractère le plus essentiel de l'emploi, pour la représentation des forces, de deux lignes distinctes : l'une indéfinie, donnant la position ou *ligne d'action* de chaque force; l'autre limitée, en donnant la grandeur et le sens.

Dans les cas les plus simples, la figure formée par ces dernières lignes peut, à la rigueur, être réduite au polygone des

Digitized by Google

forces tel qu'on l'emploie aussi en Statique; mais lorsqu'on étudie tout à la fois un système de forces et les tensions qu'elles développent dans un système de barres, alors les figures formées, d'une part par les barres et les lignes d'action des forces qui les sollicitent, d'autre part par les grandeurs de ces forces et les grandeurs des tensions qu'elles développent dans les barres, sont deux diagrammes plus ou moins complexes. Ces diagrammes jouissent, l'un à l'égard de l'autre, de propriétés *réciproques* très-simples, mais utiles et intéressantes.

C'est dans l'étude et l'utilisation de ces propriétés *qu'il convient* de placer toute la science de la Statique graphique.

§ 3.

On l'a parfois regardée à l'étranger comme une science entièrement nouvelle, ayant ses méthodes propres et se suffisant à elle-même, pouvant être utilement présentée, même en dehors de toute application. Nous croyons cette opinion exagérée et, dans une certaine mesure, dangereuse. La Statique graphique, malgré la parfaite rigueur de ses procédés, ne constitue, pour nous, qu'une application très-heureuse et extrêmement utile des méthodes combinées de la Géométrie moderne et de la Statique, mais elle n'ajoute de principe véritablement nouveau ni à l'une ni à l'autre de ces sciences, et nous montrons, dans une Note placée à la fin de cet Ouvrage, qu'elle peut être regardée comme un corollaire en quelque sorte immédiat de la transformation parabolique de M. Chasles, qui est elle-même, comme on sait, un cas particulier de la transformation par polaires réciproques. Donc, si l'on se plaçait à un point de vue purement spéculatif, elle pourrait être réduite à une simple observation à ajouter à la théorie de la transformation par polaires réciproques.

Ce qui lui a valu, à juste titre, d'être érigée en corps de doctrine, ce sont ses applications; aussi, tout en faisant res-

sortir l'intérêt très-réel qu'elle présente au point de vue géométrique, avons-nous cherché à lui laisser son caractère de science d'application, ne prétendant nullement à empiéter sur le domaine de la Statique, dont elle emprunte les principes.

§ 4.

C'est, au surplus, paraît-il, un praticien qui en a eu la première pensée : M. Taylor, un simple mécanicien de la maison du constructeur anglais J.-B. Cochrane; mais ce sont les travaux de Rankine (1857) (*) et surtout ceux de Clerk Maxwell (1864), sur la théorie des figures réciproques, qui ont donné aux procédés de Taylor le caractère d'une méthode précise et sûre.

Celui qui, avec Rankine, Taylor et Maxwell, a le plus contribué au développement de la Statique graphique, c'est Culmann, par son enseignement de l'École Polytechnique de Zurich et par un Ouvrage considérable, *Die Graphische Statik*, publié en 1866.

Culmann ne se sert pas précisément de la théorie des figures réciproques de Maxwell : ses figures ne sont même pas toutes réciproques, et, sous ce rapport, on peut craindre que ses procédés ne soient peut-être pas toujours appliqués d'une façon aussi heureuse par ses disciples qu'ils le sont par lui-même. Dès qu'on ne prend pas la théorie des figures réciproques pour guide, il reste, dans beaucoup de cas, des doutes sur la manière de disposer les lignes des figures, de

(*) Au moment même où nous écrivons ces lignes, nous recevons de la famille de M. Macquorn Rankine une lettre de faire part de la mort de l'éminent professeur de l'Université de Glasgow. Qu'il nous soit permis de lui offrir ici notre tribut de regrets. Sa perte sera ressentie non-seulement par les hommes de science, mais aussi par les ingénieurs et les constructeurs; car ses recherches ont presque toutes un caractère utilitaire. Son Manuel *of applied Mechanics* notamment est le digne prolongement des *Leçons sur la Mécanique industrielle* de Poncelet. (Mai 1873.)

Digitized by Google

façon que chaque ligne, une fois tracée, serve dans les constructions subséquentes sans qu'il soit besoin de la déplacer parallèlement à elle-même. Cette perplexité, la considération des figures réciproques la fait entièrement disparaître.

En revanche, Culmann traite certaines questions auxquelles les figures réciproques ne s'appliqueraient pas; sa méthode est des plus ingénieuses : il fait un emploi systématique du polygone des forces et du polygone des pressions ou polygone funiculaire, *relatif à un pôle donné* (*Kräfte Polygon und Seilpoligen oder Drucklinie*) (*).

§ 5.

En 1869, M. le professeur Fleeming Jenkins a adressé à la Société royale d'Édimbourg un excellent Mémoire où il fait des applications nombreuses, bien choisies et extrêmement correctes de la théorie des figures réciproques (**). Après

(*) Voici en quels termes M. Cremona apprécie la méthode de Culmann : « Ma quando si parla di risoluzioni geometriche de problemi della scienza delle costruzioni, non si puo certamente tacere del prof. Culmann, l'ingegnoso e benemerito creatore della Statica graphica, al quale è dovuto se i metodi spicci ed eleganti di questa scienza, usciti dalla scuola di Zurigo, vengono ora insegnati in parecchi Politecnici di Germania (e da ben cinque anni anche nell' Instituto tecnico superiore di Milano). Tutte le questioni di Statica teorica, come pur quelle che appartengono ai singoli rami delle pratiche applicazioni, sono risolute dal prof. Culmann con uniforme e simplice procedimento, che in sostanza si reduce alla costruzione delle due figure ch'egli denomina *Kräftepolygon e Seilpolygon*. E benchè egli non le consideri come figure reciproche, nel senso della teoria di Maxwell, tuttavia esse sono tali sostanzialmente; ed in particolare, le costruzioni geometriche che il Culmann dà nel 5° Abschnitt della sua Opera, consacrato ai sistemi reticolari (*das Fachwerk*), coincidono quasi sempre con quelle che si dedurrebbero dai metodi del Maxwell medesimo. Anzi, le costruzioni di Culmann comprendono anche quei casi (non isfuggiti al Geometra inglese), ne' quali i diagrammi reciproci non sono possibili.

(**) On the practical applications of reciprocal figures to the calculation of stains on Framework. (*Transactions of the R. Society of Edinburgh*, t. XXV.)

avoir rappelé en quelques mots le principe de cette théorie, il ajoute : « Peu d'ingénieurs se douteront cependant que les deux paragraphes précités mettent à leur disposition une méthode remarquable de simplicité et de rapidité pour déterminer les forces intérieures d'un *framework* et l'attention de l'auteur a été attirée vers cette méthode, parce qu'elle est due à un simple mécanicien, Taylor (*)....

Plus loin, il ajoute encore que, comparée à la méthode algébrique, la méthode graphique est frappante de simplicité et ne donne pas lieu, comme la première, à des erreurs résultant du grand nombre de pièces similaires, les unes tendues, les autres pressées, dont les forces élastiques sont à calculer, et aux notations encombrantes et confuses que ces calculs nécessitent (**).

§ 6.

En 1870, M. Cremona a publié un opuscule : *Le Figure reciproche nella Statica graphica*, où il présente la théorie des figures réciproques à un point de vue nouveau et extrêmement élégant, en regardant ces figures comme projections des polyèdres réciproques que l'on déduit de la théorie de Möbius, sur la composition des forces dans l'espace.

On arriverait au même résultat que M. Cremona, en consi-

(*) « Few engineers would, however, suspect that the two paragraphs quoted put at their disposal a remarkably simple and accurate method of calculating the stresses in framework; and the author's attention was drawn to the method chiefly by the circumstance that it was independently discovered by a practical draughtsman, M. Taylor, working in the office of the well-known contractor, M. J.-B. Cochrane. »

(**) When compared with algebraic methods, the simplicity and rapidity of execution of the graphic method is very striking; and algebraic methods applied to frames such as the Warren girders, in which there are numerous similar pieces, are found to result in frequent clerical errors, owing to the cumbrous notation which is necessary, and especially owing to the necessary distinction between odd and even diagonals. »

Digitized by Google

dérant, au lieu des deux résultantes d'un système de forces, les deux droites conjuguées dont M. Chasles, et après lui M. Mannheim, ont fait un si fréquent usage dans l'étude du déplacement des systèmes invariables.

§ 7.

Le nom de M. Chasles est à plus d'un titre lié à la Statique graphique. On peut, en effet (*voir* la Note I placée à la fin de cet Ouvrage), considérer les figures réciproques de Clerk Maxwell comme une conséquence en quelque sorte immédiate d'un théorème établi par M. Chasles en 1829 (*Bulletin des Sciences mathématiques* de M. le baron de Férussac).

Au surplus, et bien que la Statique graphique telle qu'elle se trouve constituée aujourd'hui ait pris naissance à l'étranger, il est difficile de parler d'application de la Géométrie à la Mécanique sans rappeler que les premiers travaux dans cette voie, et de beaucoup les plus considérables, sont ceux des géomètres français; et pour ne citer que ceux qui ne sont plus, les noms de Poinsot, de Coriolis, de Binet, de Dupin, de Navier, de Prony, de Poncelet, de Cauchy, de Lamé... sont attachés à toute science tenant à la fois de la Géométrie et de la Mécanique.

§ 8.

La Statique graphique, que beaucoup croient d'origine allemande, n'a au contraire pénétré en Allemagne que très-tardivement. M. le professeur Karl von Ott dit, à ce sujet, dans un Ouvrage publié à Prague le 6 juillet 1870 (*): « Depuis l'apparition de la Statique graphique de Culmann, qui permet de trouver, par des procédés purement graphiques, les dimensions et les forces intérieures des diverses constructions, il s'est passé six ans, et pourtant cette branche de la

(*) *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik.*

science, si intéressante en elle-même et si importante pour l'ingénieur, n'a pas encore trouvé l'accueil auquel elle aurait droit, en raison de sa fécondité et de sa grande utilité pratique.

» Ce fait doit être attribué à ce que l'ignorance et la paresse déclarent généralement la guerre aux choses nouvelles, si avantageuses puissent-elles être, et à ce que les vieux praticiens notamment se résignent difficilement à abandonner, en faveur de procédés nouveaux, les méthodes auxquelles ils sont depuis longtemps habitués.

» Ce qui empêche encore la prompte vulgarisation de l'Ouvrage de Culmann, c'est qu'il suppose l'étude préalable de la nouvelle Géométrie de Staudt, laquelle, malgré ses avantages et la façon supérieure dont elle est exposée par l'auteur, présente encore, pour les débutants, de sérieuses difficultés (*). »

(*) « Seit dem erscheinen der graphischer Statik von R. Culmann, welche die zulässige belastung der verschiedenen banobjecte und deren dimensionen auf rein graphischen Wege zu finden lehrt, sind bereits sechs jahre verflossen und trotzdem hat dieser interessante und für den Ingenieur Höchst wichtige Wissenszweig noch nicht jene verbreitung und Anerkennung gefunden, die er in folge seiner grossen Fruchtbarkeit und praktischen brauchbarkeit berests hatte erlangen sollen.

» Als Ursache hiervon mag zum Theil der Umstand schuld sein, dass alles neue-wenn es auch noch so vortrefflich ist-entweder aus bequem lichkeitsrucksichten, oder aus Unkenntniss, angefeindet wird, indem sich viele namentlich die alteren Praktiker, schwer entschliessen können, von altberbekannten wohl eingeübten methoden zu gunsten der neuern Richtung abzulassen.

» Der raschen und allegemeinen Ausbreitung des oben genannten Werkes mag ubrigen auch der Umstand hinderlich sein, dass Culmann gleich von vorneherein die kenntniss der Geometrie der lage fordert und zum vorstudium seines Werkes, die neue Geometrie von Staudt anempfiehlt, die trotz ihrer vortrefflichkeit bei den genialen Schreibweisse Staudt's, dem anfanger auf diesem felde, grosse Schwierigkeiten bietet. »

Digitized by Google

II. — But que l'on s'est proposé dans le présent Ouvrage.

§ 9.

Le but que nous avons essayé de réaliser dans le présent Ouvrage est d'exposer les méthodes de la Statique graphique d'une façon à la fois complète et élémentaire, n'exigeant pas la connaissance de ce que M. Ott appelle la Géométrie de Staudt, de ce que nous appelons, en France, la Géométrie supérieure. Nous ne nous appuyons que sur les principes de la Géométrie la plus élémentaire et sur la règle du parallélogramme des forces.

Contrairement à ce que l'on fait d'habitude, nous avons cru utile de séparer nettement ce qui, dans la Statique graphique, est d'ordre purement géométrique, de ce qui appartient à la Statique proprement dite. Nous avons donc fait une première Section intitulée : *Principes préliminaires de Géométrie*. Nous y établissons d'abord la théorie géométrique de ce qu'on peut appeler le *polygone des lignes*. Cela nous amène à exposer les premières notions du calcul graphique.

Le calcul graphique n'a rien de bien nouveau; mais il forme une utile introduction à la Statique graphique; il existe à peu près complet dans notre enseignement, mais il s'y trouve éparpillé; il n'est pas sans utilité d'en réunir les éléments épars.

Le calcul graphique complet constituerait, d'ailleurs, une science étendue et élevée; ici nous nous bornons à la partie la plus élémentaire, la seule dont nous ayons besoin.

Nous donnons ensuite une définition purement géométrique de ce qu'on peut appeler les polygones funiculaires *d'un système de lignes*, et nous établissons, sans recours à aucune considération mécanique, toutes les propriétés de ces polygones. Ces propriétés sont en effet d'ordre géométrique, comme celles des figures réciproques, par la

Digitized by Google

théorie desquelles se termine cette première partie de notre Ouvrage.

La deuxième Section, intitulée : *Principes de Statique graphique*, porte exactement les mêmes divisions que la première : ce qui était tout à l'heure le polygone des lignes devient le polygone des forces; les polygones funiculaires, relativement à *différents pôles* d'un système de lignes, deviennent ici les polygones funiculaires en nombre infini, qu'admet tout système de forces situées dans un plan. Enfin les figures réciproques, qui étaient de pures abstractions géométriques, deviennent maintenant, les unes les images de systèmes de barres, les autres les représentations des forces extérieures et intérieures qui les sollicitent.

Cette division nous amène à établir les propriétés fondamentales des polygones funiculaires et des figures réciproques deux fois : une fois par la Géométrie pure et une fois par la Statique.

Nous ne voyons à cette redite, d'ailleurs très-brève, aucun inconvénient; car c'est seulement quand on a vu les choses à ce double point de vue qu'on est bien en possession des procédés de la Statique graphique, qu'on est en mesure de les appliquer sans hésitation *toutes les fois qu'ils sont applicables*, et de discerner avec certitude les cas où ils sont applicables d'avec ceux qui exigent le recours soit à la Statique analytique, soit à la théorie mathématique de l'élasticité. Et c'est, croyons-nous, un point capital, que de savoir faire cette distinction; et c'est un point dont on ne s'occupe pas dans les Ouvrages de Statique graphique que nous avons eu occasion de consulter.

Nous y insistons beaucoup, en prenant pour point de départ les travaux, sur la théorie des figures réciproques, de Maxwell.

Les figures les plus complexes se tracent avec la dernière facilité une fois qu'on a bien compris les principes que nous donnons à ce sujet et qui sont, du reste, d'une extrême simplicité.

Digitized by Google

Ajoutons que, si l'on se place sur le terrain de la science pure, les démonstrations géométriques que nous donnons sont préférables aux démonstrations mécaniques, puisque les unes reposent seulement sur les axiomes de la Géométrie, tandis que les autres supposent en outre les principes et les axiomes de la Statique.

§ 10.

Nous ne faisons aucun usage de la théorie des moments, mais nous montrons avec quelle facilité la Statique graphique se prête à leur construction; et nous exposons brièvement la théorie des moments pour bien montrer qu'il y a équivalence entre l'office qu'ils remplissent en Statique analytique et celui que remplissent, en Statique graphique, les polygones funiculaires.

Mais le lecteur qui voudra arriver rapidement aux applications usuelles pourra passer tout ce qui est relatif à la théorie des moments.

La troisième Section est exclusivement consacrée aux applications : les nombreux exemples que nous donnons comprennent à peu près, du moins nous l'espérons, tous les cas que la pratique offre aux applications de la Statique graphique : ponts fixes, ponts tournants, cintres pour voûtes, charpentes, détermination graphique des efforts tranchants, des moments fléchissants et des moments d'inertie.

Nous avons emprunté quelques-unes de nos figures aux Ouvrages existants, notamment à ceux de M. Cremona, de M. Jenkins et de M. Ott. Nous avons adopté les notations si claires de M. Cremona, consistant, quand on a deux figures réciproques, à représenter les lignes de l'une par des chiffres *gras* et les lignes correspondantes de l'autre par les chiffres ordinaires similaires.

Nous passons ensuite à la composition des forces de l'espace. Nous proposons, à titre de premier essai, l'introduction,

dans cette théorie, de ce que nous appelons la *pyramide funiculaire*, qui nous semble constituer la véritable extension à l'espace du polygone funiculaire, tel qu'on le considère habituellement en Statique graphique, Nous donnons la théorie des polyèdres réciproques, que l'on déduit du théorème relatif à la réduction d'un système de forces à deux, et nous montrons comment les figures réciproques de la Statique graphique s'en déduisent. C'est le point de vue nouveau où s'est placé M. Cremona.

Dans la Note I, nous donnons un troisième moyen d'arriver à ces figures, en les regardant comme projections des polyèdres réciproques résultant de la transformation parabolique de M. Chasles.

Dans la Note II, nous exposons une méthode générale très-simple pour déterminer, au moyen de la théorie mathématique de l'élasticité, les tensions d'un système de barres élastiques, dans les cas où la Statique laisse le problème indéterminé.

C'est le résumé d'un Mémoire que nous avons récemment présenté à l'Académie des Sciences (*). Il est rédigé de façon à pouvoir être lu indépendamment du reste de l'Ouvrage. Nous croyons qu'il contient quelques résultats nouveaux, intéressants en eux-mêmes et utiles dans la mécanique des constructions. L'un de ces résultats consiste en ce que les systèmes de barres auxquels s'appliquent les procédés de la Statique graphique sont, en général, les seuls qui puissent être constitués de façon que toutes les barres supportent mêmes pressions ou mêmes tensions par unité de surface; ce sont donc les plus économiques, ceux qu'il convient toujours d'employer, de telle sorte que nos recherches sur cette matière, entreprises dans le but de combler, par la théorie mathématique de l'élasticité, les lacunes de la Statique graphique, conduisent,

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 28 avril 1873.

d'une façon inattendue, à une propriété nouvelle et importante de cette dernière science.

§ 11.

La Statique graphique est aujourd'hui enseignée partout à l'étranger, dans les Écoles professionnelles comme dans les Instituts techniques supérieurs; même en Allemagne, où elle n'a pénétré que vers 1870, elle est extrêmement répandue; c'est même là qu'il existe aujourd'hui le plus d'Ouvrages classiques sur cette matière. Ainsi, outre l'Ouvrage de M. Karl von Ott, dont nous avons parlé plus haut, on pourrait citer un Ouvrage considérable de M. Bauschinger, professeur à l'École Polytechnique de Munich, plusieurs ouvrages remarquables de M. Winkler, professeur à l'École Polytechnique de Vienne, puis des Ouvrages de Ritter, de Harlacher, de Möhr, de Reulaux, etc.

Nous nous estimerions heureux si nous avions réussi à faire ressortir tout ce qu'elle offre d'utile et d'intéressant. Elle met à la disposition de tous, pour tenir lieu des savants et laborieux calculs auxquels se livrent encore journellement nos ingénieurs, des procédés simples et expéditifs. Ces procédés ont de plus le précieux avantage de porter toujours en eux-mêmes le principe de leur vérification, de telle sorte que s'ils peuvent, comme toutes les méthodes graphiques, laisser un doute sur une fraction décimale, chose très-indifférente en ce genre d'applications, ils sont en revanche exempts de ces chances d'erreurs grossières que comportent les longues opérations arithmétiques et les formules algébriques, où rien ne parle aux yeux.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

Pages.

Notice historique sur la Statique graphique I

But que l'on s'est proposé dans le présent Ouvrage XII

PREMIÈRE SECTION.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES DE GÉOMÉTRIE ET DE CALCUL GRAPHIQUE.

CHAPITRE I.

Théorie géométrique du polygone des lignes et notions de calcul graphique 1

1. Sens d'un polygone. — 2. Notations. — 3, 4, 5, 6, 7. Addition de lignes. — 8, 9. Soustraction de lignes. — 10. Multiplication de lignes. — 11. Élévation aux puissances d'une ligne. — 12. Division de deux lignes. — 13. Opérations sur les fractions. — 14. Extraction des racines. Emploi des courbes logarithmiques. — 15, 16. Opérations sur les surfaces. — 17. Instruments de calcul.

CHAPITRE II.

Théorie géométrique des polygones funiculaires d'un système de lignes 15

18. Lemmes. — 19. Définition géométrique des polygones funiculaires d'un système de lignes. Pole d'un polygone funiculaire. — 20. Lorsque le pôle d'un polygone funiculaire parcourt une ligne droite, les côtés du polygone pivotent autour de points fixes. — 21. Le lieu des points d'intersection de deux côtés quelconques d'un polygone funiculaire est une ligne droite. Résultante géométrique d'un système de lignes. — 22, 23, 24, 25. Théorèmes divers sur la résultante d'un système de lignes.

CHAPITRE III.

Théorie géométrique des figures réciproques de la Statique graphique 28

26. Définition des figures qui font l'objet de ce Chapitre. — 27. Relation générale entre le nombre des côtés, le nombre des sommets et le nombre

Pages.

des polygones fermés d'une figure. — 28. Division des figures en figures déformables, strictement indéformables et à lignes surabondantes. — 29. Théorème donnant les relations entre le nombre des côtés et le nombre des sommets de ces trois espèces de figures. — 30, 31. Définition des figures réciproques, en général, et en particulier des figures réciproques usitées en Statique graphique. — 32, 33. Une figure donnée n'admet pas nécessairement une figure réciproque. Exemples. — 34, 35, 36. Conditions générales de possibilité, d'impossibilité ou d'indétermination du problème de la recherche de la figure réciproque d'une figure donnée. — 37. Sur un cas particulier du problème des figures réciproques.

DEUXIÈME SECTION.

PRINCIPES DE STATIQUE GRAPHIQUE.

CHAPITRE IV.

Composition et équilibre graphiques des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan. — Le polygone des forces et les polygones funiculaires considérés au point de vue mécanique 54

38. Double objet de la Statique graphique. — 39. Représentation des forces en Statique graphique. — 40, 41. Règle du parallélogramme ou du triangle des forces. — 42, 43. Composition des forces concourantes. Composition des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan, sauf certaines restrictions. — 44. Solution générale du problème de la composition graphique des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan, déduite des propriétés géométriques des polygones funiculaires. — 45. Même solution obtenue par des considérations purement mécaniques. — 46. Les propriétés géométriques des polygones funiculaires déduites de considérations mécaniques. — 47, 48, 49. Conditions graphiques pour qu'un système de forces distribuées dans un plan : 1° admette une résultante unique; 2° soit en équilibre; 3° se réduise à un couple. — 50, 51. Cas particuliers des forces parallèles.

CHAPITRE V.

Équilibre des systèmes plans non libres. Recherche graphique des réactions des appuis 69

52. Équilibre d'un système assujetti à tourner autour d'un point fixe. Pression sur le point fixe. — 53. Équilibre d'un corps s'appuyant par un point unique sur une ligne inébranlable. Pression sur cette ligne. — 54. Équilibre d'un corps reposant par deux de ses points sur des lignes planes fixes. Pressions sur ces lignes. — 55. Équilibre d'un corps ayant un point fixe et s'appuyant, par un autre point, sur une ligne fixe. Réactions des appuis. — 56. Équilibre d'un corps reposant par trois points sur des lignes fixes. 57, 57 *bis*. Décomposition graphique d'un système de forces suivant trois lignes quelconques situées dans leur plan. — 58. Corps reposant par quatre points sur des lignes données ou ayant deux points fixes. Sur l'indétermination des réactions des appuis.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

Pages.

Équilibre des systèmes plans libres ou non formés de barres inflexibles, articulées. — Recherche graphique des tensions des barres 81

59. Tension d'un fil. Tension ou pression d'une barre. — 60. Énoncé du problème à résoudre. — 61, 61 *bis*. Sa solution dans le cas particulier des polygones articulés. — 62. Propriété mécanique fondamentale des figures réciproques. — 63. Solution graphique du problème général de la recherche des tensions d'un système de barres. — 64, 65. Discussion de cette solution.

CHAPITRE VII.

Projections et moments des forces situées dans un plan 96

66. Équivalence entre le rôle analytique des projections des forces et le rôle graphique du polygone des forces. — 67. Définition et construction graphique du moment d'une force. — 68, 69. Construction du moment de la résultante d'un système de forces. — 70. Théorèmes. — 71, 72. Équivalence entre le rôle analytique des moments des forces et le rôle graphique des polygones funiculaires.

CHAPITRE VIII.

Composition des forces parallèles dans l'espace. Centre des forces parallèles ... 105

73. Lemme. — 74. Centre des forces parallèles. Sa détermination graphique. — 75. Composition et équilibre graphiques des forces parallèles dans l'espace.

CHAPITRE IX.

Projections et moments des forces parallèles dans l'espace 111

76. Lemme. — 77. Moment d'une force relativement à un plan. — Théorème sur les moments d'un système de forces parallèles relativement à un plan. Détermination du centre des forces parallèles. — 78. Équivalence entre le rôle analytique des projections et des moments et le rôle graphique du polygone des forces et des polygones funiculaires.

CHAPITRE X.

Détermination graphique des centres de gravité des corps, surfaces et lignes 114

79. Poids et centre de gravité d'un corps, d'une surface, d'une ligne. — 80, 81. Méthode générale pour la détermination graphique des centres de gravité. — 1° *Centres de gravité des lignes*. — 82. Application de la méthode générale à la recherche du centre de gravité d'un contour polygonal ou curviligne. — 83, 84, 85, 86. Triangle, portion de polygone régulier, arc de cercle. — 2° *Centre de gravité des aires planes*. — 87, 88. Centre de gravité de l'aire d'un parallélogramme. — 89. Application de la méthode générale à la recherche du centre de gravité de l'aire d'un polygone ou d'une courbe quelconque. — 90, 91, 92, 93, 94, 95. Quadrilatère, trapèze, secteur de cercle ou de polygone régulier, segment de cercle, anneau compris entre deux arcs de cercles concentriques, segment de parabole. — 3° *Centre de gravité des surfaces courbes ou polyédrales*. 96. Application de la méthode générale à la recherche du centre de gra-

Digitized by Google

Pages.

vité d'une surface courbe ou polyédrale. — 97, 98, 99. Surface latérale d'une pyramide ou d'un cône; surface latérale d'un tronc de pyramide ou de cône à bases parallèles; calotte et zone sphériques. — 4° *Centre de gravité des corps.* — 100. Théorème. — 101, 102. Centre de gravité du tétraèdre. Théorèmes. — 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111. Centre de gravité du volume d'une pyramide ou d'un cône quelconque, d'un tronc de pyramide ou de cône à bases parallèles, d'un polyèdre quelconque, d'un secteur sphérique, d'une portion d'enveloppe sphérique comprise entre deux sphères concentriques, d'un segment sphérique, du volume d'une zone sphérique, d'un segment de paraboloïde, d'un corps quelconque.

TROISIÈME SECTION.

APPLICATION DE LA STATIQUE GRAPHIQUE A L'ART DES CONSTRUCTIONS.

CHAPITRE XI.

Application à un framework en général..... 145

112. Définition des frameworks et avantages qu'ils présentent dans les constructions. — 113. Recherche des tensions d'un framework soumis à des forces quelconques. Règle à suivre pour distinguer les lignes tendues des lignes comprimées.

CHAPITRE XII.

Application aux diverses espèces de ponts fixes..... 154

1° *Ponts à poutres droites.* — 114. Poutres droites de hauteur constante portant des charges verticales uniformes ou quelconques sur le tablier. — 115. Poutres droites de hauteur constante ne portant qu'une charge verticale concentrée en un point du tablier. — 116. Poutres droites de hauteur variable portant des charges verticales quelconques. — 2° *Ponts suspendus.* — 117. Ponts suspendus rigides. — 118. Autre exemple de pont suspendu rigide. — 119. Pont suspendu ordinaire. — 3° *Ponts en arc.* — 120. Exemple d'un pont en arc avec son tympan. Pont d'Arcole sur la Seine à Paris.

CHAPITRE XIII.

Application aux ponts tournants et aux grues tournantes..... 161

121. Exemple d'une grue tournante. — 122. Exemple d'un pont tournant. — 123. Cas des croix de Saint-André. — Pont tournant sur la Penfeld, à Brest.

CHAPITRE XIV.

Application aux diverses espèces de charpentes pour toitures..... 164

124. Considérations sur les charges que supportent les charpentes pour toitures. Données sur les charges dues : 1° au poids propre de la charpente et de la toiture; 2° au poids de la neige; 3° à la pression du vent. — 125, 126, 127, 128, 129, 130. Recherche graphique des tensions dans les divers types de charpentes usités en France, en Angleterre, en Allemagne.

Digitized by Google

CHAPITRE XV.

Pages.

Application aux cintres des voûtes et à des charpentes diverses 172

131. Notions préliminaires sur le frottement. — 132. Recherche de l'action exercée par une voûte en cours de construction sur son cintre. — 133, 134, 135, 136. Recherche des tensions dans divers types de charpentes formant cintre et dans des types de charpentes diverses.

CHAPITRE XVI.

Application à la détermination graphique des efforts tranchants et des moments fléchissants 178

137. Définition des efforts tranchants et des moments fléchissants. — 138. Méthode générale pour déterminer graphiquement les efforts tranchants et les moments fléchissants. — 139. Application aux poutres droites portant des charges verticales. — 140. Application aux arcs portant des charges verticales.

CHAPITRE XVII.

Application à la détermination graphique des moments d'ordre supérieur des forces parallèles dont les points d'application sont situés dans un plan et particulièrement à l'étude des moments d'inertie 183

141. Définition et détermination graphique des moments d'ordre supérieur qui font l'objet de ce Chapitre. — 142. Des moments d'inertie relatifs à des axes parallèles ou concourants. — 143. Ellipse d'inertie; axes principaux; ellipse centrale, axes centraux. — 144. Caractère des diamètres conjugués des coniques d'inertie. — 145. Nouvelle définition de la conique d'inertie. — 146, 147. Tracé graphique de la direction des axes principaux relatifs à un point quelconque du plan. — 148, 149, 150, 151. Détermination graphique de la grandeur des axes principaux relatifs à un point quelconque et du moment d'inertie relatif à une droite quelconque du plan. — 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158. Méthode pour la recherche des moments d'inertie des aires planes. Application au rectangle, au triangle, au cercle, à l'anneau circulaire, à l'ellipse, à l'anneau elliptique.

CHAPITRE XVIII.

Étude des forces parallèles dont les points d'application sont situés dans un plan et dont les intensités sont proportionnelles aux distances de leurs points d'application à une droite de ce plan. Noyau central des aires planes 209

159. Utilité de la considération des forces qui font l'objet de ce Chapitre. — 160. Recherche graphique du centre de ces forces parallèles. — 161. Cas de forces en nombre illimité agissant aux divers points d'une aire plane. — 162. Noyau central d'une aire plane. La courbe limitant une aire plane et celle qui limite son noyau central sont des antipolaires relativement à l'ellipse centrale de la première de ces courbes. — 163. Méthode générale pour la recherche graphique du noyau central d'une aire quelconque. — 164, 165. Application aux aires limitées par des polygones fermés. Parallélogramme, triangle, ellipse et cercle, anneau elliptique et anneau circulaire.

Digitized by Google

QUATRIÈME SECTION.

COMPOSITION DES FORCES DANS L'ESPACE ET FIGURES RÉCIPROQUES QUI EN DÉCOULENT.

CHAPITRE XIX.

Pages.

Composition des forces dans l'espace 218

166. Les forces de l'espace n'admettent pas en général de polygones funiculaires. — 167. Polyèdre funiculaire de Rankine : sa complication. — 168. Pyramide funiculaire : son analogie avec les polygones funiculaires plans. — 169, 170. Droites conjuguées ou correspondantes. A toutes les droites d'un plan correspondent toutes les droites concourant en un point de ce plan; aux droites concourant en un point de l'espace correspondent les droites d'un plan passant par ce point. — 171, 172. Foyer d'un plan, plan focal d'un point. Le lieu des foyers d'un faisceau de plans passant par une droite est une autre droite. — 173. Définition. — Théorème.

CHAPITRE XX.

Polyèdres réciproques 226

174. Définition et existence des polyèdres réciproques relativement à un système de forces données. — 175. Les projections de deux polyèdres réciproques relativement à un système de forces, sur un plan perpendiculaire à sa résultante de translation, sont des figures planes réciproques. — 176, 177, 178. Comment on déduit de là les principales propriétés de ces dernières figures en les regardant comme projections de polyèdres.

CHAPITRE XXI.

Moments autour d'un axe des forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace 230

179. Moment d'une force autour d'une droite. — 180, 181. Théorème sur la somme des moments d'un système de forces : 1° concourantes, 2° quelconques. — 182. Foyer d'un plan et plan focal d'un point définis par les propriétés des moments. Le foyer d'un point est le point nul (*nul punct*) de Möbius.

NOTES.

NOTE I.

Sur une manière de déduire les figures réciproques de la Statique graphique de la transformation parabolique de M. Chasles 233

NOTE II.

Mémoire sur la recherche des tensions dans les systèmes de barres élastiques et sur les systèmes qui, à volume égal de matière, offrent la plus grande résistance possible 236

Objet et principaux résultats de ce Mémoire 236

Digitized by Google

Pages.

Conditions pour que la Statique suffise à déterminer les tensions d'un système de barres..... 241
Méthode générale pour trouver les tensions dans un système de barres élastiques, lorsque la Statique laisse le problème indéterminé..... 248
Propriétés générales des systèmes d'égale résistance..... 253
Comparaison entre les principales poutres employées en Europe et aux États-Unis, au point de vue du volume de matière à dépenser, pour résister à des charges uniformes ou roulantes..... 277
Conclusions pratiques..... 305

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 26, § 19 : *au lieu de* Définition géométrique du polygone funiculaire, *lisez* Définition géométrique des polygones funiculaires, etc.

Page 31, dernière ligne : *au lieu de*

$$p + n = m = 2,$$

lisez

$$p + n - m = 2;$$

avant-dernière ligne, *au lieu de* $n = -14$, *lisez* $n = 14$.

Pages 192 et 193. Dans la formule (2) de la page 192 et dans les trois premières formules de la page 193, *mettez partout* b' et b_1 *au lieu de* a' et a_1 et *vice versâ*.

Page 192, 8e ligne en remontant : *au lieu de* soit b_{11}, *lisez* soit a_1.

Digitized by Google

LA
STATIQUE GRAPHIQUE
ET SES
APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS.

SECTION PREMIÈRE.
NOTIONS PRÉLIMINAIRES DE GÉOMÉTRIE ET DE CALCUL GRAPHIQUE.

CHAPITRE PREMIER.
THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DU POLYGONE DES LIGNES ET NOTIONS DE CALCUL GRAPHIQUE.

§ 1.

SENS D'UN POLYGONE. SENS CYCLIQUE D'UN CONTOUR FERMÉ. — Nous appellerons *sens cyclique* d'un contour polygonal fermé un sens arbitraire, mais convenu une fois pour toutes, dans lequel le contour serait parcouru par un mobile idéal. Le sens d'une portion quelconque du contour est le sens dans lequel elle est parcourue par le mobile; l'origine de cette portion du contour est le point où le mobile l'atteint; son extrémité, le point où le mobile la quitte.

D'après cela, quand on s'est donné le sens d'un contour polygonal fermé ou non, le sens de chacun de ses côtés se trouve par là même défini.

Par la ligne qui ferme un contour polygonal, nous entendrons toujours la ligne dirigée *dans le sens* du contour, c'est-à-dire que l'origine de cette ligne coïncide avec l'extrémité du contour et *vice versâ*.

Digitized by Google

§ 2.

NOTATIONS. — Nous désignerons habituellement les côtés des contours polygonaux par les chiffres successifs 1, 2, 3, 4,..., et nous conviendrons, une fois pour toutes, de disposer ces chiffres de façon que l'on obtienne le sens du contour en les suivant dans leur ordre croissant; l'origine d'un côté quelconque sera donc son intersection avec le côté désigné par le chiffre immédiatement inférieur; son extrémité sera son intersection avec le côté désigné par le chiffre immédiatement supérieur.

Le sommet formé par deux côtés consécutifs, désignés par les chiffres r et $r+1$, sera habituellement désigné par $rr+1$.

La *fig.* 1 (*Pl. I*) comprend un contour formé par les cinq côtés 1, 2, 3, 4, 5. L'origine du contour est en a, son extrémité en b; la ligne qui ferme le contour est la ligne ba et non la ligne ab.

§ 3.

ADDITION DE LIGNES. — Soient donnés les grandeurs, directions et sens d'un certain nombre de lignes distribuées d'une manière quelconque dans un plan ou dans l'espace. A partir d'un point quelconque, portons ces lignes bout à bout de manière à former un contour polygonal. La droite qui va de l'*origine* de ce contour à son *extrémité*, sera ce que nous appellerons la *somme* des lignes données.

Le contour polygonal, obtenu en portant les lignes bout à bout, sera appelé le *polygone de ces lignes*.

La somme d'un certain nombre de lignes est, d'après cela, égale en grandeur et direction, mais (§ 1) *opposée* en sens à la ligne qui ferme le polygone de ces lignes.

Nous désignerons habituellement les lignes données par les chiffres *gras*

1, 2, 3, 4,...,

et les côtés correspondants du polygone de ces lignes par les chiffres ordinaires similaires

1, 2, 3, 4,....

Ainsi la *fig.* 2 contient sept lignes; le polygone de ces lignes est

indiqué par les lignes pleines de la *fig.* 2. La ligne *ab* est la somme de ces lignes; la ligne *ba* est celle qui ferme leur polygone.

Remarque. — On voit que le polygone des lignes fournit non-seulement la somme de toutes les lignes données, mais aussi les sommes partielles de deux ou plusieurs de ces lignes, pourvu qu'elles soient consécutives. Ainsi *cd* est la somme des lignes 2, 3, 4; *ce* la somme des lignes 2, 3, 4, 5, et ainsi de suite.

§ 4.

Théorème. — *La somme d'un nombre quelconque de lignes est indépendante de l'ordre dans lequel on les additionne.*

Il est évident d'abord que l'on ne change pas la somme des lignes données si, dans l'addition, on intervertit l'ordre de deux lignes consécutives. Ainsi intervertissons (*fig.* 2, *Pl. I*) l'ordre de succession des lignes 4 et 5; cela reviendra à porter à la suite de 3 une ligne 5_1 égale et parallèle à 5, et au bout de celle-ci une ligne 4_1 égale et parallèle à 4. Le contour $5_1 4_1$ aboutira au point *e* aussi bien que le contour 4 5, en sorte que les lignes subséquentes 6 et 7 ne changeront pas de place, et la ligne qui va de l'origine à l'extrémité du contour 1 2 3 5_1 4_1 6 7 est la même que celle qui va de l'origine à l'extrémité du contour 1 2 3 4 5 6 7, ce qui signifie que les deux sommes $1+2+3+5+4+6+7$ et $1+2+3+4+5+6+7$ sont les mêmes.

Du moment où l'on peut, sans altérer la somme de lignes données, permuter une ligne avec celle qui la précède ou qui la suit, on pourra, par une nouvelle permutation, la faire avancer ou reculer de deux rangs; par une autre permutation, de trois rangs et ainsi de suite; de sorte que l'on pourra sans changer la somme amener une ligne quelconque à occuper un rang quelconque.

Remarque. — On peut encore énoncer ainsi la proposition qui précède :

Si un polygone dont les côtés sont donnés en grandeur, direction et sens se ferme, lorsque ses côtés se succèdent dans un certain ordre, il se fermera également quel que soit l'ordre de leur succession.

Cette remarque nous sera très-utile plus loin.

§ 5.

Théorème. — *La somme d'un nombre quelconque de lignes n'est pas altérée si, dans l'addition, on remplace certains groupes de ces lignes par leurs sommes partielles.*

Cela est évident si les lignes que l'on remplace par leurs sommes partielles sont consécutives. Ainsi l'on a (*fig.* 2, *Pl. I*)

$$1+2+3+4+5+6+7=1+cd+5+6+7=1+ce+6+7$$

et ainsi de suite, et, comme on peut (§ 4) amener des lignes quelconques à être consécutives, le théorème se trouve vrai pour des lignes quelconques.

§ 6.

Théorème. — *La projection sur un plan ou sur une droite de la somme d'un certain nombre de lignes est égale à la somme de leurs projections sur ce plan ou sur cette droite.*

On appelle *projection* sur un plan ou sur une droite d'une ligne donnée en grandeur, direction et sens, une autre ligne dont l'origine est la projection de l'origine de la ligne donnée, et l'extrémité la projection de l'extrémité de la ligne donnée. Il résulte de là que le sens de la ligne projetée découle immédiatement du sens de la ligne que l'on projette.

D'après cela le théorème énoncé est évident. Si l'on projette le polygone plan ou gauche (*fig.* 2, *Pl. I*) sur un plan ou sur une droite, la ligne *ab* égale et opposée à celle qui ferme le polygone de l'espace se projette suivant une ligne égale et opposée à celle qui ferme le polygone projeté.

Corollaire. — *La somme des projections d'un polygone fermé sur un plan ou sur une droite est nulle.*

§ 7.

Tout ce qui précède est vrai, que les lignes données soient ou non toutes situées dans un plan; mais ce n'est que quand elles sont dans un plan que leur addition pourra s'effectuer graphique-

ment. S'il s'agit de lignes qui ne sont pas situées dans un même plan, on devra se les donner, comme c'est l'usage en Géométrie descriptive, en projection sur deux plans; et, d'après le dernier théorème, il suffira d'additionner les lignes sur chacun des deux plans de projection pour avoir les deux projections de leur somme, et par suite le moyen de déterminer graphiquement cette somme elle-même.

§ 8.

SOUSTRACTION DE LIGNES. — *Soustraire une ligne b d'une ligne a, c'est additionner cette dernière à la première changée de sens.*

Soient, par exemple, les deux lignes données 1 et 2 (*fig.* 3, *Pl. I*), ayant leurs grandeurs représentées par 1 et 2 (*fig.* 3).

Leur différence est $CD = 1 + (-2)$, tandis que leur somme serait OA, OCDA étant un parallélogramme; car $OA = 2 + 1 = 1 + 2$.

§ 9.

Cas particulier des lignes parallèles. — Lorsque les lignes à additionner ou à soustraire sont parallèles, leur polygone se réduit à une droite, et leur somme ou leur différence se confond avec ce que l'on appelle ordinairement somme ou différence de grandeurs données. Les *fig.* 4 et 4, *Pl. I*, donnent la somme de cinq lignes 1, 2, 3, 4, 5, dont le polygone se réduit à une droite ayant son origine en *a* et son extrémité en *b*, de sorte que *ab* est la somme des lignes données. Pour plus de clarté, on a mis une double ligne, ce qui permet de mieux distinguer dans les lignes qui se superposent celles qui sont dirigées dans un sens et celles qui sont en sens opposé. Il n'y a aucune ambiguïté sur le sens à attribuer à chaque ligne, si l'on se rappelle (§ 1) que le sens du polygone des lignes (polygone réduit ici à une droite) se trouve en suivant les lignes dans l'ordre croissant des chiffres qui les représentent. Ainsi, partant de l'origine *a*, on voit que la ligne 1 va de droite à gauche; puis vient 2, qui va de gauche à droite; puis 3, qui va de droite à gauche; puis 4, qui va dans le même sens; et enfin 5, qui vient de gauche à droite aboutir à l'extrémité *b* du polygone, en sorte que *ab* est la somme des lignes données et *ba* la droite qui ferme leur polygone.

Digitized by Google

§ 10.

MULTIPLICATION DE LIGNES. — Soit à déterminer le produit de n lignes

$$l_1,\quad l_2,\quad l_3,\quad l_4 \ldots\ldots,\quad l_n.$$

Pour le trouver graphiquement, sur une ligne OX (*fig.* 5, *Pl. II*), portons une longueur O 1 égale à l'unité; puis, sur une perpendiculaire à OX élevée en 1, portons les longueurs $1\,l_1 = l_1$, $1\,l_2 = l_2$, $1\,l_3 = l_3$, $1\,l_4 = l_4$, et ainsi de suite. Joignons les points l_1, l_2, l_3, l_4,... au point O, de façon à former les lignes indéfinies OL_1, OL_2, OL_3, OL_4, ...

Cela fait, posons

$$y_1 = l_1.$$

Prenons $O2 = y_1$. Au point 2 élevons une perpendiculaire à OX jusqu'à sa rencontre avec OL_2 en 2'. Soit y_2 la longueur 22'; portons-la sur OX à partir de O, et par son extrémité 3 élevons une perpendiculaire à OX jusqu'à sa rencontre avec OL_3 en 3'.

Soit y_3 la longueur 33'. Opérons sur elle comme sur 22', c'est-à-dire portons-la sur OX à partir de O, et par son extrémité 4 élevons une perpendiculaire à OX jusqu'à sa rencontre avec OL_4 en 4'.

Soit y_4 la longueur 44'. En opérant sur elle de la même manière que sur les lignes y_2 et y_3, nous aurons la longueur 55' que nous appellerons y_5, et, en poursuivant ainsi, on formera la série des n lignes

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4,\quad y_5 \ldots\ldots,\quad y_n,$$

dont la première est égale à l_1. Je dis que la dernière est le produit cherché et qu'on a généralement

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = l_1, \\ y_2 = l_1 \times l_2, \\ y_3 = l_1 \times l_2 \times l_3, \\ y_4 = l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4, \\ \vdots \\ y_n = l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4 \times \ldots \times l_n. \end{cases}$$

Digitized by Google

En effet les triangles semblables $O\,1\,l_2$ et $O\,2\,2'$ donnent

$$\frac{2\,2'}{1\,l_2} = \frac{O\,2}{O\,1},$$

ou

$$\frac{y_2}{l_2} = \frac{y_1}{1} = \frac{l_1}{1},$$

ou

$$y_2 = l_1 \times l_2.$$

On verrait de même que

$$y_3 = y_2 \times l_3 = l_1 \times l_2 \times l_3,$$
$$y_4 = y_3 \times l_4 = l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4,$$

et ainsi de suite.

§ 11.

ÉLÉVATION AUX PUISSANCES D'UNE LIGNE. — Soit à trouver la puissance $n^{ième}$ d'une ligne donnée l. Pour cela d'un point O (*fig.* 6, *Pl. II*) menons deux lignes indéfinies perpendiculaires entre elles XX′ et YY′. Sur l'une d'elles XX′, portons $Ox_0 = 1$; sur l'autre, $Ox_1 = l$. En x_1 élevons une perpendiculaire à x_0x_1 jusqu'à sa rencontre avec XX′ en x_2; par ce point, une perpendiculaire à x_1x_2 jusqu'à sa rencontre avec YY′ en x_3; par ce point, une perpendiculaire à x_2x_3 jusqu'à sa rencontre en x_4 avec XX′, et ainsi de suite. On aura, d'après une propriété connue du triangle rectangle,

$$Ox_0 \times Ox_2 = l^2 \quad \text{ou} \quad Ox_2 = l^2,$$
$$l \times Ox_3 = \overline{Ox_2}^2 = l^4 \quad \text{ou} \quad Ox_3 = l^3.$$

On aura de même

$$Ox_4 = l^4,$$

et ainsi de suite.

Remarque. — Ici on voit que la longueur donnée $l = Ox_1$ est supposée plus petite que l'unité Ox_0; il en résulte que les puissances successives de l, représentées par les longueurs Ox_2, Ox_3, Ox_4,..., sont de plus en plus petites. Le contraire se produirait si l était supérieur à l'unité. Dans ce cas, la figure pourrait prendre des dimensions trop grandes et peu commodes. Pour éviter cet incon-

vénient, il faudrait alors construire, par le procédé qui sera indiqué au § 12, la ligne a représentant l'inverse $\frac{1}{l}$ de la ligne donnée, et chercher la $n^{ième}$ puissance de la ligne a, laquelle est plus petite que l'unité; et, comme $a^n = \left(\frac{1}{l}\right)^n = \frac{1}{l^n}$, il suffira ensuite de construire une ligne c égale à l'inverse de celle représentant a^n pour avoir l^n.

§ 12.

DIVISION DE DEUX LIGNES. — Soit (*fig.* 7, *Pl. II*) à trouver le quotient $\frac{a}{b}$ de deux lignes a et b. Sur une ligne OX, on portera $O1 = 1$ et $Ob = b$. Sur la perpendiculaire à OX, élevée en b, on portera $ba = a$ et l'on joindra le point O au point a, de façon à former la ligne indéfinie OL. Si ensuite du point 1 on élève $1y = y$ perpendiculaire à OX jusqu'à la rencontre de la ligne OL, on aura évidemment

$$\frac{y}{1} = \frac{a}{b},$$

ou

$$y = \frac{a}{b}.$$

Remarque. — Si l'on prenait $O1 = d$, la relation précédente serait remplacée par celle-ci :

$$\frac{y}{d} = \frac{a}{b},$$

c'est-à-dire que la fraction proposée se trouverait réduite à une autre fraction ayant un dénominateur donné d.

§ 13.

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS. — Toute fraction pouvant, d'après le procédé que nous venons d'indiquer, être représentée par une ligne, tout ce que nous avons dit sur les opérations relatives aux lignes est immédiatement applicable aux fractions.

Addition et soustraction. — On ramène toutes les fractions à avoir

Digitized by Google

un dénominateur donné d (§ 12). La somme ou la différence des lignes représentant les numérateurs sera égale à la somme ou à la différence des fractions données, si le dénominateur commun a été pris égal à l'unité. Parfois il est commode de prendre pour d un nombre déterminé et entier d'unités. Dans ce cas, on devra diviser la ligne représentant la somme ou la différence des numérateurs des fractions réduites en autant de parties égales que d contient d'unités, pour avoir la somme ou la différence des fractions données.

D'autres fois, il peut être plus commode, au point de vue graphique, de prendre d égal à une partie $\frac{1}{i}$ de l'unité, i étant un nombre entier. Dans ce cas, la ligne représentant la somme ou la différence des fractions données sera égale à i fois celle qui représente la somme ou la différence des numérateurs des fractions réduites.

Multiplication et division. — On peut faire la multiplication graphique des fractions aussi facilement que celle des lignes.

Soient $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots$ les fractions données. Sur une ligne OX (*fig.* 5, *Pl. II*) on porte, à partir du point O, des longueurs égales à leurs dénominateurs b_1, b_2, b_3; à l'extrémité de chacune de ces longueurs, on élèvera une perpendiculaire à OX égale au numérateur de la fraction correspondante. On joindra les extrémités de ces perpendiculaires au point O, de façon à déterminer les lignes OL_1, OL_2, $OL_3, \ldots$. On portera ensuite sur OX une longueur $O1 = 1$; on élèvera la perpendiculaire $1l_1 = y_1$ jusqu'à la rencontre de la ligne OL_1; on portera cette longueur y_1 sur OX, à partir de O, de façon à obtenir la ligne O2; on élèvera en 2 une perpendiculaire à OX jusqu'à sa rencontre avec OL_2, ce qui donnera $22' = y_2$; on continuera de la sorte et l'on formera, comme au § 10, des lignes

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad y_4, \ldots, \quad y_n,$$

et l'on aura

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1l_1}{O1} = y_1,$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{22'}{O2} = \frac{y_2}{y_1},$$

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{33'}{O3} = \frac{y_3}{y_2},$$

et ainsi de suite. En multipliant membre à membre les deux premières équations, ou les trois premières, etc., on trouvera

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} = y_2,$$

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} = y_3,$$

et ainsi de suite.

Le quotient de deux fractions étant le produit de la fraction dividende par la fraction diviseur renversée, la division des fractions se ramène immédiatement à leur multiplication.

Élévation aux puissances d'une fraction. — On a très-souvent à élever des fractions aux puissances ou à construire des équations de la forme

$$(A) \qquad \frac{y}{d} = \frac{a^n}{b^n},$$

où a, b, d sont des lignes données et y une ligne à déterminer; pour cela, on devra commencer par construire la fraction $\frac{a^n}{b^n}$. A cet effet, on tracera (*fig.* 6 *bis*, *Pl. II*) deux lignes OX, OY se coupant sous un angle quelconque. Du point O, on décrira un arc de cercle aa' de rayon a et un arc de cercle bb' de rayon b. On mènera les antiparallèles ab' et ba', puis on prendra sur l'une des deux lignes tracées, sur OY par exemple, une longueur arbitraire O1; on mènera les lignes 11', 1'2, 22', 2'3,... alternativement parallèles à ba' et ab'. On aura

$$\frac{O1'}{O1} = \frac{Oa'}{Ob} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{O2}{O1'} = \frac{Oa}{Ob'} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{O2'}{O2} = \frac{Oa'}{Ob} = \frac{a}{b},$$

et ainsi de suite.

Si l'on multiplie membre à membre les membres extrêmes des deux premières de ces relations, le terme O1' disparaîtra, et il viendra

$$\frac{O2}{O1} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Si l'on multiplie les trois premières, les facteurs O1′ et O2 disparaîtront, et il viendra

$$\frac{O2'}{O1} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3},$$

et ainsi de suite.

On aura donc construit ainsi une fraction ayant un dénominateur donné O1 et représentant une puissance quelconque de la fraction $\frac{a}{b}$.

Si O1 = 1, on aura représenté

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

par une ligne.

Si O1 est le dénominateur du premier membre de l'équation ci-dessus (A), le numérateur O2 ou O2′,... sera la ligne y, représentant l'inconnue de cette équation.

§ 14.

EXTRACTION DES RACINES. EMPLOI DES COURBES LOGARITHMIQUES. — L'extraction de la racine carrée d'une ligne l est une opération connue. L'un des moyens usités consiste à porter (*fig.* 8, *Pl. II*) sur une ligne XX′, d'une part $Ox_0 = 1$, d'autre part $Ox_1 = l$; à construire un demi-cercle sur $x_0 x_1$ comme diamètre : la perpendiculaire élevée en O sur $x_0 x_1$, jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence, est la racine carrée cherchée.

Mais, dès qu'il s'agit d'extraire une racine d'ordre plus élevé, on sait que la règle et le compas ne suffisent plus; on peut alors employer graphiquement les logarithmes.

Il faut pour cela construire une courbe qui tienne lieu des Tables de logarithmes.

Supposons que sur une ligne OX (*fig.* 9, *Pl. II*) on porte des longueurs Ox_1, Ox_2, Ox_3,..., que nous appellerons des *abscisses*, ces longueurs représentant à une échelle quelconque des nombres très-rapprochés; qu'aux points x_0, x_1, x_2,... on élève des perpendiculaires que nous appellerons des *ordonnées*, représentant à la même échelle les logarithmes de ces nombres; qu'on joigne les

extrémités $y_1, y_2, y_3, \ldots$ de ces perpendiculaires par une ligne continue. Cette ligne tiendra lieu d'une Table de logarithmes.

Pour faire le produit de n lignes $x_1, x_2, x_3, \ldots$, il suffira de les porter sur OX à partir de O, de faire la somme des ordonnées correspondantes $y_1, y_2, y_3, \ldots$, et de chercher quelle est la longueur d'abscisse OX qui correspond à l'ordonnée $u = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots$.

Cette opération sera infiniment plus rapide que la recherche correspondante dans une Table de logarithmes, surtout si l'on a eu soin de tracer la courbe CE sur du *papier quadrillé* (*).

Si l'on a à élever x_1 à une puissance $n^{ième}$, il suffira de porter sur OX une longueur égale à x_1, de prendre l'ordonnée correspondante y_1 et de chercher l'abscisse OX répondant à une ordonnée égale à n fois y_1.

Veut-on, au contraire, extraire la racine $n^{ième}$ de x_1, ce sera l'abscisse répondant à une ordonnée égale à $\frac{y_1}{n}$ qu'il faudra chercher.

§ 15.

OPÉRATIONS SUR LES SURFACES. — Pour effectuer sur les surfaces les opérations qui précèdent, il faut pouvoir aussi les représenter par des lignes. Nous indiquerons sommairement les procédés très-élémentaires qui donnent ce résultat.

1° Triangle. — Soit (*fig.* 10, *Pl. II*) ABC un triangle. On peut toujours construire un triangle équivalent et ayant une base donnée BK. Il suffit pour cela, par le point C, de mener une parallèle à KA. Si A′ est le point où cette ligne rencontre AB, il est facile de voir que les deux triangles ABC et BA′K sont équivalents; car, si de l'un et de l'autre on retranche l'aire commune BCA′, il reste les deux triangles A′CK et A′CA équivalents comme ayant même base A′C et leurs sommets placés sur une parallèle à cette base.

Le triangle BA′K ayant une base BK choisie arbitrairement, si

(*) On se sert plus habituellement, non de la courbe exponentielle CE, mais de ce qu'on appelle la *spirale logarithmique*. Il nous semble que la spirale doit être d'un usage infiniment moins commode en ce qu'elle oblige à des additions, multiplications et divisions, d'une part, d'angles et, d'autre part, de lignes divergentes, pour lesquelles on ne peut pas mettre à profit le papier quadrillé qui les donne en quelque sorte toutes faites.

l'on a pris cette base égale à deux unités, la hauteur h de ce triangle représentera son aire, et par suite l'aire du triangle donné ABC.

2° Parallélogramme. — Se déduit immédiatement du triangle.

3° Quadrilatère quelconque. — Soit (*fig.* 11, *Pl. II*) ABCD un quadrilatère. Menons la diagonale BD et par le point C une parallèle CC_1 à cette diagonale jusqu'à sa rencontre en C_1 avec le côté AB ou son prolongement.

Le triangle AC_1D est équivalent au quadrilatère donné; car, si de chacune de ces deux surfaces on retranche l'aire ADB qui leur est commune, il reste les deux triangles CDB et C_1DB, qui sont équivalents comme ayant même base DB et leurs sommets placés sur une parallèle à cette base; et comme nous savons représenter un triangle par une ligne, nous saurons résoudre la même question pour un quadrilatère.

4° Polygone quelconque. — Le même procédé permet de ramener un polygone quelconque à un triangle équivalent, et par suite de le représenter par une ligne.

Soit le polygone ABDEFG (*fig* .12, *Pl. II*).

1) On éliminera le sommet G en menant FF_1 parallèle à la diagonale FG et substituant le sommet F_1 à F.

2) On éliminera le sommet F_1 en menant EE_1 parallèle à DF_1 et substituant le sommet E_1 à E.

3) On éliminera le sommet E_1 en menant DD_1 parallèle à BE_1 et substituant le sommet D_1 à D.

Le triangle ABD_1 sera équivalent au polygone de six côtés donné; et comme on peut ensuite représenter l'aire de ce triangle par une droite, le problème se trouve résolu pour un polygone quelconque.

§ 16.

Si l'on avait à trouver l'aire d'une courbe fermée plus ou moins irrégulière, on substituerait à la courbe un polygone inscrit d'un grand nombre de côtés et l'aire de ce polygone pourrait être approximativement prise pour l'aire cherchée.

§ 17.

INSTRUMENTS DE CALCUL. — Au calcul graphique se rattachent aussi les instruments à l'aide desquels on fait les calculs.

Digitized by Google

Les principaux de ces instruments qui commencent à se répandre dans l'industrie sont, outre la règle à calcul :

1° L'arithmomètre de M. Thomas (de Colmar).

C'est une série d'engrenages permettant de faire mécaniquement, rapidement et sans aucune fatigue d'esprit, les opérations arithmétiques et de les faire *exactement*.

2° Le planimètre d'Amsler, qui donne mécaniquement, et avec une approximation très-suffisante pour les avant-projets qu'ont à dresser les ingénieurs, l'aire d'un contour fermé quelconque, polygonal, curviligne ou mixtiligne.

Il est très-commode pour le calcul des profils en travers des avant-projets de routes ou de chemins de fer.

3° L'intégromètre de M. Dupré, qui donne non-seulement les aires, mais les centres de gravité et les moments d'inertie des surfaces planes limitées par des contours fermés quelconques.

Nous ne donnerons pas la description et la théorie de ces instruments; ils se vendent toujours accompagnés d'instructions suffisantes pour l'usage que l'on a à en faire.

Le planimètre d'Amsler est très-usité dans l'industrie; il se vend chez MM. Lerebours et Secretan, opticiens, place du Pont-Neuf à Paris. On en trouve la théorie dans une Note de M. Resal, insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 25 août 1873).

L'intégromètre de M. Dupré est un instrument d'invention récente, qui n'est sans doute pas encore consacré par l'usage. Quant à l'arithmomètre, il est d'un prix très-élevé et la règle à calcul en peut tenir lieu dans une certaine mesure.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES POLYGONES FUNICULAIRES D'UN SYSTÈME DE LIGNES.

§ 18.

Lemme I. — *Étant donnée une figure formée de six lignes joignant quatre points d'un plan, il est toujours possible de construire une seconde figure, également composée de six lignes joignant quatre points, et telle : 1° qu'à chaque côté de l'une des figures corresponde un côté parallèle ou perpendiculaire de l'autre; 2° qu'à tout système de trois lignes concourantes de l'une correspondent dans l'autre les trois côtés d'un triangle.*

Les deux figures satisfaisant à ces conditions sont dites réciproques.

Soit (*fig.* 13, *Pl. III*) ABCD la figure donnée. Elle comprend quatre triangles BCD, CDA, DAB, ABC. La figure formée par les six lignes joignant les centres a, b, c, d des cercles circonscrits à ces quatre triangles jouira évidemment des propriétés énoncées. Cela résulte immédiatement de ce que les perpendiculaires élevées sur les milieux de trois côtés d'un triangle concourent en un même point.

A toute ligne AB ou 1 de la figure donnée correspond, dans la figure nouvelle, une ligne perpendiculaire cd ou (1); à tout système de trois lignes 1, 4, 5, formant dans la figure donnée un triangle, correspondent, dans la seconde figure, trois lignes concourantes (1), (4), (5); et inversement, à trois lignes formant un triangle dans la figure réciproque, répondent dans la figure donnée trois lignes concourantes.

Remarque I. — Si l'on déplace la figure $abcd$ en la faisant tourner d'un angle droit, elle n'en demeurera pas moins réciproque de la proposée; seulement deux lignes correspondantes, au lieu d'être perpendiculaires, seront parallèles.

Remarque II. — Toute figure semblable à $abcd$ peut être placée de façon à être réciproque de la proposée ABCD.

Digitized by Google

Inversement toute figure réciproque de ABCD est semblable à *abcd* comme étant nécessairement composée d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés. Ainsi la figure *a'b'c'd'* (*fig.* 13), semblable à *abcd*, est réciproque de ABCD et les côtés correspondants des deux figures, marquées par des chiffres similaires, sont parallèles.

Lemme II. — Observons maintenant qu'une figure formée de six lignes joignant quatre points d'un plan est entièrement déterminée par cinq de ces lignes. Ces cinq lignes forment nécessairement deux triangles ayant un côté commun et la sixième ligne, qui joint les deux sommets non communs de ces triangles, est déterminée dès que l'on connait les cinq autres. Donc, quand cinq lignes de la figure réciproque sont tracées de façon à correspondre à cinq lignes de la figure donnée, on est certain que les sixièmes lignes des deux figures seront également correspondantes, ce qu'on peut énoncer ainsi :

Si cinq des six lignes joignant quatre points d'un plan sont parallèles ou perpendiculaires à cinq des six lignes joignant quatre autres points, et si ces lignes sont tracées de façon qu'à un système de trois lignes concourantes de l'une des figures correspondent dans l'autre les trois côtés d'un triangle, les sixièmes lignes des deux figures sont également parallèles ou perpendiculaires, et les deux figures sont réciproques.

§ 19.

DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DU POLYGONE FUNICULAIRE D'UN SYSTÈME DE LIGNES. POLE D'UN POLYGONE FUNICULAIRE. — Soient donnés (*fig.* 17, *Pl. IV*) : 1° un système de lignes

11', 22', 33', 44', 55', 66', 77',

distribuées d'une manière quelconque dans un plan (ce sont les lignes munies de flèches); 2° le polygone de ces lignes (*fig.* 17) ayant pour côtés

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

D'un point O choisi arbitrairement menons des lignes ou *rayons* aux divers sommets du polygone. (Le rayon aboutissant au sommet

$rr+1$ sera généralement désigné par $Orr+1$ ou plus simplement par $rr+1$.)

Puis construisons un nouveau polygone ayant ses sommets sur les lignes 11′, 22′, 33′,... et ses côtés parallèles aux rayons issus du point O, de telle façon que le côté de ce nouveau polygone, compris entre deux lignes consécutives telles que 22′ et 33′, soit parallèle au rayon aboutissant au sommet 23 du polygone des lignes, et que les côtés extrêmes du nouveau polygone soient parallèles aux rayons extrêmes O*a* et O*b* du polygone des lignes.

Ce nouveau polygone sera appelé le *polygone funiculaire relatif au point* O, *du système des lignes données* 11′, 22′, 33′,....

Le point O sera appelé le *pôle* du polygone funiculaire.

Ainsi le polygone A1234567B est le polygone funiculaire des lignes données relatif au pôle O. Pour le tracer, d'un point quelconque A on mène A1 parallèle au rayon O*a* jusqu'à la rencontre de la première des lignes données, celle 11′; puis on mène successivement 12 parallèle au rayon O12 ou 12, puis 23 parallèle au rayon 23, et ainsi de suite jusqu'à 67, qui est parallèle au rayon 67; enfin 7B est parallèle au rayon extrême O*b*.

Le point de départ A est arbitraire, en sorte qu'il existe une infinité de polygones funiculaires relatifs à un pôle donné O; tous ces polygones ont, par définition, leurs côtés parallèles.

Maintenant on peut faire varier la position du pôle O; on obtient ainsi une nouvelle infinité de polygones funiculaires dont les côtés ne sont plus parallèles; mais on comprend qu'ils doivent avoir entre eux de certaines dépendances. Ce sont ces dépendances que nous nous proposons d'étudier.

§ 20.

Théorème. — *Lorsque le pôle d'un polygone funiculaire parcourt une ligne droite quelconque, les divers côtés de ce polygone ne font que pivoter chacun autour d'un point fixe; et ces points fixes sont tous situés sur une même ligne droite, parallèle à celle que parcourt le pôle.*

Soit (*fig.* 17, *Pl. IV*) A1234567B un polygone funiculaire des lignes données, ayant O (*fig.* 17) pour pôle.

Digitized by Google

Construisons un second polygone funiculaire, relatif à un pôle O′ différent de O. Soit A′1′2′3′4′5′6′7′B′ ce nouveau polygone.

Prolongeons les côtés correspondants 1A et 1′A′ des deux polygones jusqu'à leur rencontre en I, et les côtés 12 et 1′2′ jusqu'à leur rencontre en J et considérons :

1° La figure formée par les six lignes qui joignent les quatre points 1, 1′, I et J.

Ces lignes sont

(1) 11′, 1I, 1J, 1′I, 1′J, IJ.

2° La figure formée par les six lignes qui joignent les quatre points O, O′, *a* et 12 du polygone des lignes.

Ces lignes sont

(1′) 1, O*a*, O12, O′*a*, O′12 et OO′.

On voit immédiatement que les cinq premières lignes (1) sont, par construction, correspondantes aux cinq premières lignes (1′). Donc, en vertu du lemme II (§ 18), il en est de même des sixièmes lignes IJ et OO′, qui se trouvent ainsi parallèles.

En prolongeant les côtés 23 et 2′3′ jusqu'à leur rencontre en K, on montrerait de même que JK est parallèle à OO′, en sorte que tous les points d'intersection I, J, K,... des côtés correspondants des deux polygones funiculaires sont sur une même ligne droite parallèle à celle qui joint les deux pôles.

Remarque I. — Si le point O′ se rapproche indéfiniment de O en parcourant la droite O′O, les sommets 1 et 1′ des deux polygones funiculaires demeurant fixes, on voit que les points I, J, K s'éloignent de plus en plus, *en restant toujours en ligne droite;* et à la limite, quand le point O′ coïncide avec O, ces points se trouvent toujours sur une droite, mais sur une droite placée à l'infini. (*sur la droite de l'infini*). Les côtés correspondants de deux polygones funiculaires relatifs à un même pôle sont donc parallèles. C'est ce que nous savions déjà; mais on voit que cette propriété de deux polygones funiculaires relatifs à un même pôle O peut être regardée comme un cas particulier de celle qui vient d'être établie pour des polygones funiculaires relatifs à deux pôles différents.

C'est le cas où les points I, J, K,..., autour desquels pivotent les côtés du polygone funiculaire, sont tous placés sur la droite de l'infini.

Remarque II. — Quand on connaît un polygone funiculaire particulier d'un système de lignes données, on connaît par cela même tous les polygones funiculaires possibles du système.

En effet, connaissant le polygone funiculaire relatif à un pôle O, pour avoir le polygone funiculaire le plus général, il suffit de tracer dans le plan une ligne arbitraire ZZ_1; de prolonger les côtés du polygone donné jusqu'à leur rencontre avec cette ligne aux points I, J, K,...; puis, pour avoir le point 1′, de mener par le point I une nouvelle ligne de direction arbitraire I1′ jusqu'à sa rencontre avec la ligne 11′. Une fois tracées ces deux lignes ZZ_1 et I1′ (dont la première est arbitraire à la fois en direction et en position, et la seconde en direction seulement), tous les autres côtés du polygone funiculaire s'ensuivent; on mènera la ligne 1′J qu'on prolongera jusqu'à sa rencontre avec la ligne 22′ en 2′; puis la ligne K2 jusqu'à sa rencontre avec la ligne 33′ en 3′, et ainsi de suite.

Il est facile de voir directement que le polygone ainsi constitué est un polygone funiculaire. Pour cela menons par l'origine a du polygone des lignes une droite aO' parallèle à la ligne 11′ dont la direction a été prise arbitrairement, et par le point O une parallèle à la ligne ZZ_1, qui a été également prise arbitrairement.

En considérant les deux figures formées par les lignes qui joignent, d'une part les quatre points 1, 1′, I et J, et d'autre part les quatre points O, O′, a et 12, on voit que tous leurs côtés, sauf ceux O′12 et 1′2′, sont parallèles et correspondants; donc, en vertu du lemme II (§ 18), ces deux derniers le sont aussi. En considérant ensuite les figures formées par les lignes qui joignent O, O′, 12, 23 d'une part et 2, 2′, J, K d'autre part, on verra que tous leurs côtés sont correspondants, sauf ceux O′23 et 2′3′; donc ceux-ci sont parallèles. On verrait de même que O′34 est parallèle à 3′4′ et ainsi de suite, en sorte que les côtés successifs du polygone A′1′2′3′... sont parallèles aux rayons issus de O′. Ce polygone est donc un polygone funiculaire dont O′ est le pôle.

§ 21.

Théorème. — *Quel que soit le chemin parcouru par le pôle d'un polygone funiculaire, le point d'intersection des deux côtés*

Digitized by Google

extrêmes de ce polygone décrit une ligne droite. Cette ligne est parallèle à celle qui ferme le polygone des lignes données, en sorte qu'elle est indépendante du chemin décrit par le pôle.

Soit (*fig.* 17 et 17, *Pl. IV*), 8 le point d'intersection des côtés extrêmes 18 et 78 du polygone funiculaire relatif au pôle O.

Soit 8′ le point d'intersection des côtés analogues 1′8′ et 7′8′ du polygone funiculaire relatif à O′; enfin soient I le point d'intersection de 18 et 1′8′, et M le point d'intersection de 78 et 7′8′. Nous savons que la ligne IM est parallèle à OO′.

Considérons d'une part les six lignes qui joignent les quatre points I, M, 8 et 8′, et d'autre part les six lignes qui joignent O, O′ et les deux extrémités *a*, *b* du polygone des lignes. On vérifie immédiatement que les cinq lignes de la première figure autres que 88′ sont parallèles et correspondantes aux cinq lignes de la seconde figure autres que *ab*. Donc les deux lignes 88′ et *ab* sont parallèles.

Remarque I. — Ce théorème, s'appliquant à un système quelconque de lignes, s'appliquera à une portion quelconque des lignes données aussi bien qu'à toutes ces lignes, c'est-à-dire à une portion quelconque du polygone funiculaire et à la portion correspondante du polygone des lignes.

Ainsi *le point d'intersection de deux côtés quelconques du polygone funiculaire décrit une ligne droite parallèle à la ligne qui ferme la portion correspondante du polygone des lignes.*

Par exemple, le point d'intersection X des côtés 23 et 67 du polygone funiculaire décrit une droite XX′ parallèle à celle *xx′* qui ferme le polygone 3456.

La droite ainsi décrite par le point d'intersection de deux côtés d'un polygone funiculaire est ce que nous appellerons la *résultante* de celles des lignes données qui sont comprises entre ces deux côtés. La droite XX′ est donc la *résultante* des lignes 33′, 44′, 55′, 66′, de même que *xx′* est (§ 3) la *somme* des lignes correspondantes 3, 4, 5, 6 du polygone des lignes. La droite 88′ est la résultante de toutes les lignes données.

Deux systèmes de lignes ayant *même résultante* seront dits *équivalents*.

Remarque II. — Le point d'intersection des deux côtés extrêmes de tout polygone funiculaire d'un système de lignes appartenant à

la résultante de ces lignes, prenons en particulier un polygone funiculaire relatif au pôle a, c'est-à-dire à l'origine du polygone des forces pris comme pôle.

Le rayon allant du pôle à l'origine sera donc de grandeur nulle et de direction indéterminée; la direction du premier côté du polygone funiculaire sera, par suite, elle-même indéterminée, ainsi que le point d'intersection de ce côté avec le dernier côté du même polygone; cela revient à dire qu'un point quelconque de ce dernier côté appartient à la résultante.

Ainsi *le dernier côté du polygone funiculaire d'un système de lignes, relatif à l'origine du polygone des lignes pris comme pôle est la résultante de ces lignes,* et généralement, comme ce qui est vrai pour l'ensemble des lignes données l'est pour une partie de ces lignes, un côté quelconque du polygone funiculaire dont il s'agit coïncide avec la résultante de la partie correspondante des lignes données.

Ainsi la *fig.* 22 (*Pl. VI*) comprend sept lignes :

$$11', \ 22', \ 33', \ 44', \ 55', \ 66', \ 77,$$

ayant pour polygone les lignes

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7$$

de la *fig.* 22. Le polygone funiculaire A 1 2 3 4 5 6 7 8 1, relatif au pôle quelconque O, fait connaître par l'intersection de ses côtés extrêmes 1 8 et 7 8 un point 8 de la résultante 88′ des sept lignes données; mais le polygone funiculaire relatif au pôle a donne cette résultante tout entière.

Le côté (1 2) de ce polygone est la résultante des lignes 1 et 2; le côté (1 2 3) la résultante des lignes 1 2 3, et ainsi de suite; le dernier côté (1 2 3 4 5 6 7) représente la résultante de toutes les lignes données.

On voit par là que le polygone relatif au pôle a est très-remarquable; malheureusement il ne peut pas toujours être utilisé. Pour le tracer, partons d'un point quelconque A; le premier côté A 1 peut être pris arbitraire; c'est celui qui correspond au rayon nul, allant au point a; puis du point 1 on devra mener une parallèle à 1. Cette parallèle est toute tracée : c'est la ligne donnée 1 1′. On devra la prolonger jusqu'à sa rencontre en E avec la ligne 22′. Par le

point d'intersection de ces deux lignes, on devra mener une parallèle à la diagonale (1 2) jusqu'à la rencontre de la ligne donnée 3 3′, et ainsi de suite; mais on voit qu'on est arrêté dès le tracé de la ligne (1 2), si les lignes données 1 1′ et 2 2′ ne se rencontrent pas, si elles sont parallèles. On est arrêté pour le tracé du côté (1 2 3), si le côté 1 2 est parallèle à la ligne donnée 3 3′, et ainsi de suite. Si, sans être parallèles, ces diverses lignes sont très-près de l'être, le polygone particulier dont il s'agit, sans être impossible, devient difficile à tracer; aussi, malgré ses qualités particulières, s'en sert-on rarement dans les applications.

Remarque III. — La résultante de deux lignes consécutives passe par leur point d'intersection. On voit sur les *fig.* 22 et 22 que la résultante 1 2 des lignes 1 1′ et 2 2′ passe par leur point d'intersection E. Si l'on voulait établir que la résultante de deux autres lignes 3 3′ et 4 4′ passe par leur point d'intersection, il suffirait de même de considérer le polygone funiculaire relatif à l'origine *c* de la partie correspondante du polygone de ces lignes. Cela est d'ailleurs évident par la considération des deux figures *xyzn* et *acde*. Toutes les lignes de la première, moins celle *xu*, sont parallèles et correspondantes à celles de la seconde, moins celle *ce*. Donc les lignes *xu* et *ce* sont elles-mêmes parallèles, en vertu du lemme II du § 18.

On voit par là que la résultante de deux lignes consécutives 3 3′ et 4 4′ se trouve immédiatement, puisqu'elle passe par l'intersection de ces lignes et qu'elle est parallèle à la droite qui sous-tend l'angle formé par les côtés 3 et 4 du polygone des lignes. Comme vérification, cette résultante doit passer par le point d'intersection des côtés (1 2) et (1 2 3 4) du polygone funiculaire relatif au pôle *a*, et aussi par le point d'intersection des côtés 2 3 et 4 5 du polygone funiculaire relatif au pôle quelconque O.

De ce que la résultante de deux lignes passe par leur point d'intersection, on conclut immédiatement que la résultante d'un système de lignes concourantes passe par leur point de concours.

Remarque IV. — La résultante d'un système de lignes n'est pas modifiée si l'on remplace deux ou plusieurs lignes consécutives par leur résultante partielle.

Ainsi substituons (*fig.* 17 et 17, *Pl. IV*) aux quatre lignes con-

sécutives 33′, 44′, 55′ et 66′ leur résultante XX′, en sorte qu'au lieu des sept lignes données nous n'en ayons plus que quatre, à savoir : 11′, 22′, XX′ et 77′; au polygone des lignes à sept côtés sera substitué un polygone à quatre côtés, savoir 1, 2, xx' et 7. Le polygone funiculaire des quatre nouvelles lignes, relatif au pôle O, sera A 1 2 X 7 8. Les côtés extrêmes A 1 et 7 8 n'ayant pas changé, il en est de même du point 8; donc le lieu de ces points 8 sera aussi bien la résultante des quatre nouvelles lignes que celle des sept lignes primitives.

§ 22.

Théorème. — *La résultante d'un système de lignes n'est pas modifiée si l'on intervertit d'une manière quelconque leur ordre de succession.*

Il suffit de démontrer que l'on peut, sans altérer la résultante, changer l'ordre de succession de deux lignes consécutives; car si l'on peut permuter une ligne avec celle qui la précède ou avec celle qui la suit, on pourra, par une nouvelle permutation, la faire avancer ou reculer de deux rangs; puis, par une nouvelle permutation, de trois rangs et ainsi de suite, en sorte qu'on pourra, par des permutations successives de deux lignes seulement, amener une ligne quelconque à occuper un rang quelconque.

Or soit (A) un système de lignes; appelons (A′) ce qu'il devient lorsqu'on le considère après avoir changé l'ordre de succession de deux lignes consécutives, et (B) le système obtenu après avoir substitué à ces deux lignes leur résultante. Cette résultante est la même, quel que soit l'ordre de succession de ces deux lignes; car sa direction est celle de la somme des deux lignes, et ne change pas (§ 4) par l'interversion de leur ordre, et sa position non plus, puisqu'elle passe toujours par le point d'intersection des deux lignes, quelle que soit celle des deux qu'on considère la première; donc les systèmes (A) et (A′) sont tous deux équivalents à (B) : ils sont donc équivalents entre eux.

§ 23.

Pour que l'on saisisse bien l'utilité et l'esprit du théorème que nous venons de démontrer, nous allons, non pas en donner une dé-

monstration nouvelle, mais présenter la démonstration qui précède avec un peu plus de développements.

Permuter deux lignes consécutives 44′ et 55′, cela revient à placer dans le polygone des lignes (*fig.* 17) le côté 5 avant le côté 4, c'est-à-dire à substituer aux côtés 4 et 5 les lignes 5_1 et 4_1, dont la première est parallèle à 5 et la seconde à 4, en sorte que le polygone des lignes sera maintenant formé par les côtés 1, 2, 3, 5_1, 4_1, 6, 7. La portion A123 du polygone funiculaire (*fig.* 17) ne sera pas modifiée; du point 3 on devra mener, d'après la définition du polygone funiculaire, une ligne 35_1 parallèle au rayon $O35_1$; mais, comme ce rayon coïncide avec celui O34 du contour primitif, il s'ensuit que la ligne 35_1 coïncidera avec celle 34 de l'ancien polygone funiculaire; seulement elle devra maintenant être arrêtée en 5_1 à sa rencontre avec la ligne 55′ qui a, dans l'ordre de succession des lignes données, la priorité sur 44′. Du point 5_1 on devra ensuite mener le côté $5_1 4_1$ parallèle au rayon $O5_1 4_1$, et prolonger ce côté jusqu'à sa rencontre en 4_1 avec la ligne donnée 44′; puis par le point 4_1 on aura à conduire une parallèle au rayon $O4_1 6$; mais, comme ce rayon coïncide avec celui O56, il s'ensuit que le côté du nouveau polygone funiculaire partant de 4_1 sera nécessairement parallèle au côté 56 de l'ancien polygone funiculaire.

Ce qu'il faut démontrer, c'est que ces deux côtés sont non-seulement parallèles, mais coïncidants. Si ce fait est établi, nous retomberons sur l'ancien polygone funiculaire à partir du point 6. Nous retrouverons donc le point 8, et, comme le lieu des points 8 est la résultante des lignes données, il s'ensuivra que la résultante de ces lignes, considérées dans leur nouvel ordre de succession, est la même que dans leur ordre primitif.

Ainsi tout se réduit à montrer que, si par le point 4_1 on mène une parallèle à 56, ces deux lignes coïncideront; en d'autres termes, qu'elles ont un point commun. Or, je dis qu'elles ont en commun le point C où elles croisent 34. En effet, pour avoir la résultante C′C des deux lignes 44′ et 55′, il suffit, par leur intersection C′, de mener une parallèle à $c'c$, c'est-à-dire à la droite qui sous-tend l'angle formé par les côtés 4 et 5 du polygone des lignes, et nous sommes certain (*Rem. I* et *II*, § 21) que cette parallèle passera par l'intersection des côtés 34 et 65 du premier polygone funiculaire, c'est-à-dire par le point C.

Maintenant, la résultante des deux lignes 55′ et 44′, interverties d'ordre, passera aussi par leur point d'intersection C′ et sera parallèle à la ligne qui sous-tend l'angle formé par les lignes 5_1 et 4_1; or cette ligne est la même que celle qui sous-tend l'angle formé par les lignes 4 et 5; donc C′C représente indifféremment la résultante des lignes 55′ et 44′ ou celle des lignes 44′ et 55′. Si on l'envisage sous ce dernier point de vue, elle passe, par définition, par le point C, où se coupent les deux côtés 65 et 34 de l'ancien polygone funiculaire; si on l'envisage sous le premier point de vue, elle passe (aussi par définition) par le point d'intersection du côté $5_1 3$ du nouveau polygone avec le côté de ce polygone à conduire du point 4_1 jusqu'à la ligne 66′; et comme $5_1 3$ coïncide avec 43, le point d'intersection de ces deux côtés sera encore le point C. Donc ce point est commun à 56 et au côté du nouveau polygone parallèle à 56 à mener à partir du point 4_1; ce qu'il fallait démontrer.

§ 24.

Théorème. — *La résultante d'un système de lignes n'est pas modifiée si l'on remplace un certain nombre de ces lignes par leur résultante partielle.*

Cette proposition a été établie (*Rem. IV*, § 21) pour des lignes consécutives; et comme, en vertu du théorème qui vient d'être établi, on peut, sans altérer la résultante, amener deux lignes quelconques à être consécutives, il s'ensuit que la proposition est vraie pour un groupe de lignes quelconques.

De là résulte immédiatement la proposition suivante :

La résultante d'un système de lignes n'est pas modifiée si l'on remplace certaines de ces lignes par d'autres ayant même résultante.

§ 25.

Théorème. — *Si le polygone des lignes d'un système de lignes est fermé, ainsi que l'un de ses polygones funiculaires, tous les polygones funiculaires du système sont fermés.*

En effet, soit un système de cinq lignes : ce sont les lignes pleines munies de flèches et représentées (*fig.* 14, *Pl. III*) par les chiffres

1, 2, 3, 4 et 5;

et soient (*fig.* 14)

1, 2, 3, 4 et 5

les côtés du polygone de ces lignes.

Nous admettons :

1° *Que ce dernier polygone est fermé ;*

2° *Que le polygone funiculaire* 5 1 2 3 4 5, *relatif au pôle particulier* O, *est également fermé ;*

et nous disons que tous les polygones funiculaires du système de lignes donné seront fermés.

Voyons d'abord comment on doit choisir les cinq lignes données et les grandeurs des côtés du polygone de ces lignes pour que ce polygone et le polygone funiculaire relatif au pôle O se ferment tous deux.

Nous prendrons les quatre premières lignes données, savoir 1, 2, 3, 4, absolument au hasard. Nous tracerons les côtés correspondants 1, 2, 3, 4 du polygone de ces lignes, avec des grandeurs arbitraires ; mais, une fois ces quatre lignes de chacune des deux *fig.* 14 et 14 prises à volonté, je dis que les lignes 5 et 5 seront déterminées. Cela est évident pour la ligne 5, qui doit fermer le polygone des lignes données ; par suite, la direction de la ligne 5 se trouve également déterminée, puisque cette ligne est parallèle à 5.

Ainsi, de ce que le *polygone* de n lignes est fermé, il résulte déjà que, $n-1$ de ces lignes étant prises au hasard, la $n^{ième}$ ligne est déterminée en *direction*.

Mais, si l'on s'impose, en outre, que le *polygone funiculaire* de ces n lignes relatif à un pôle particulier O soit fermé, cette nouvelle condition fera que non-seulement la direction, mais aussi la *position* de la $n^{ième}$ ligne sera déterminée.

Si, en effet, dans la *fig.* 14 nous prenions au hasard la cinquième ligne donnée dans une position telle que $5_1 x$, on voit que le polygone funiculaire relatif au pôle O ne se fermerait pas ; car, pour tracer ce polygone, on devra mener, d'un point quelconque A du plan, successivement les lignes

A 1, 12, 23, 34, 45$_1$, 5$_1$1$_1$,

respectivement parallèles aux rayons

51, 12, 23, 34, 45, 51.

On voit que les côtés extrêmes A 1, 5_1 1_1 de ce polygone sont parallèles, mais non coïncidants; ils sont forcément parallèles du moment où le polygone des lignes est fermé, puisque, par définition, (§ 19) les côtés extrêmes de tout polygone funiculaire sont parallèles aux rayons extrêmes du contour formé par le polygone des lignes. Or, si ce contour est fermé, ses rayons extrêmes coïncident, et, par suite, les côtés extrêmes du polygone funiculaire sont parallèles ou coïncidants. Pour qu'ils soient coïncidants, il faut que la cinquième des lignes données passe par le point 5 où se rencontrent les côtés extrêmes du polygone funiculaire relatif aux quatre premières lignes données. Il faut, en d'autres termes, que la cinquième ligne soit ce que nous avons appelé la *résultante* des quatre premières. Elle est donc déterminée de direction et de position, et, en général, *pour que n lignes soient telles, que le polygone de ces lignes et leur polygone funiculaire relatif à un pôle particulier* O *se ferment, il faut et il suffit que, $n - 1$ de ces lignes étant prises arbitrairement, la $n^{ième}$ coïncide avec leur résultante,* ce qui, en vertu de la définition (§ 21) de la résultante d'un système de lignes, établit le théorème énoncé.

Remarque I. — Lorsque les n lignes données sont concourantes, il suffit que le polygone de ces lignes soit fermé pour que tous les polygones funiculaires le soient : c'est une conséquence immédiate de ce qui précède et de ce que la résultante d'un système de lignes concourantes (*Rem. III*, § 21) passe par leur point de concours.

Ceci équivaut au théorème de Géométrie suivant : *Si d'un point* O (*fig.* 15, *Pl. III*) *on mène des lignes parallèles aux côtés d'un polygone fermé* (*fig.* 15), *qu'on joigne les sommets de ce polygone à un point quelconque* C, *puis qu'on construise un second polygone ayant ses sommets sur les lignes issues de* O *et ses côtés parallèles aux lignes issues de* C, *ce polygone se fermera également.*

Cette propriété se déduirait d'ailleurs immédiatement du lemme II, établi au § 18, en remarquant que ce lemme démontre la proposition, dans le cas particulier où le polygone fermé donné se réduit à un triangle; et l'on montre facilement que, si elle est vraie pour un polygone de n côtés, elle est par cela même vraie pour un polygone de $n + 1$ côtés; donc, étant établie pour le triangle, elle est vraie pour un polygone fermé quelconque.

CHAPITRE III.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES FIGURES RÉCIPROQUES DE LA STATIQUE GRAPHIQUE.

§ 26.

DÉFINITION DES FIGURES QUI FONT L'OBJET DE CE CHAPITRE. — Considérons une figure formée de droites reliant des points distribués d'une manière quelconque dans un plan; ces points sont ce que nous appellerons les *sommets* de la figure. Toute portion de droite comprise entre deux sommets sera appelée un *côté* de la figure. Enfin nous désignerons par le mot *nœud* l'ensemble des côtés partant d'un même sommet.

Nous ne considérerons que des figures satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Qu'on puisse les décomposer en un certain nombre de polygones fermés tels, que chaque côté de la figure fasse partie de deux de ces polygones et de deux seulement;

2° Que de chaque sommet partent au moins trois lignes ; en d'autres termes, que chaque nœud se compose d'au moins trois côtés;

3° Que chaque côté passe au moins par deux sommets.

Nous pouvons d'ailleurs, sans restreindre en rien la forme d'une figure, admettre que chacun de ses côtés passe par deux sommets seulement. Il suffira pour cela, si i sommets sont placés sur une même ligne droite, de regarder les $i-1$ segments qu'ils déterminent sur cette droite comme autant de côtés distincts de la figure.

Exemples. — La *fig.* 15 (*Pl. III*) est formée d'un polygone fermé de q côtés ($q=6$) dont les sommets sont unis à un point O. Cette figure comprend $2q$ côtés passant chacun par deux sommets et par deux seulement; de chaque sommet partent au moins trois lignes; enfin elle est décomposable en $q+1$ polygones fermés, savoir : le polygone donné de q côtés et les q triangles ayant leurs sommets en O; enfin chaque côté fait partie de deux de ces polygones et de deux seulement.

La *fig.* 16 (*Pl. V*) est formée d'un polygone fermé de q côtés ($q = 6$) dont les sommets sont unis à deux points O et O'. Elle est décomposable en $2q$ polygones fermés tels, que chaque côté fasse partie de deux d'entre eux et de deux seulement, à savoir : q triangles ayant un sommet commun en O, et q triangles ayant un sommet commun en O'.

On voit donc que, quand on énumérera les polygones fermés de cette figure, on ne *devra pas tenir compte du polygone contour*, mais seulement des $2q$ triangles dont nous venons de parler. Si l'on faisait entrer en ligne de compte le polygone contour, chacun de ses côtés ferait partie de trois polygones fermés, savoir : deux triangles et le polygone contour, et la figure envisagée ainsi ne satisferait plus aux conditions spécifiées plus haut.

La *fig.* 16 (*Pl. V*) comprend deux polygones fermés d'un même nombre q de côtés ($q = 6$), dont les sommets sont unis deux à deux par q lignes 11', 22', ... De chaque sommet partent trois lignes, soit le minimum de ce que nous admettons ; et la figure peut être décomposée en $q + 2$ polygones fermés (q quadrilatères et deux polygones de q côtés), chaque côté faisant partie de deux de ces polygones et de deux seulement.

Enfin la *fig.* 19 (*Pl. V*) rentre également dans la catégorie de celles que nous considérons. Seulement, trois sommets a, b, c étant en ligne droite, la ligne ac comprend deux côtés ab et bc ; de même, la ligne dg comprend trois côtés distincts de, ef, fg.

Cette figure se décompose en treize polygones fermés, à savoir : cinq triangles, un polygone de sept côtés et sept quadrilatères.

§ 27.

RELATION GÉNÉRALE ENTRE LE NOMBRE DES SOMMETS, LE NOMBRE DES COTÉS ET LE NOMBRE DES POLYGONES FERMÉS D'UNE FIGURE. — THÉORÈME. — *Dans toute figure de la nature de celles qui viennent d'être définies, l'excès de la somme du nombre des nœuds et du nombre des polygones fermés sur le nombre des côtés est constant et égal au nombre* 2.

Ainsi soient

m le nombre des côtés d'une figure ;

Digitized by Google

n le nombre des nœuds ou, ce qui revient au même, le nombre des sommets;

p le nombre des polygones fermés.

Il s'agit de montrer qu'on a, quelle que soit la figure,

$$p + n - m = 2 \text{ (*)}.$$

Je dis d'abord que le premier membre de cette relation est constant, c'est-à-dire indépendant de la figure considérée et du nombre de ses éléments : sommets, côtés et polygones fermés.

En effet, prenons une figure quelconque; traçons-y une nouvelle ligne, en sorte que le nombre m des côtés augmente d'une unité. Je dis que la somme $p + n$ augmentera aussi d'une unité, en sorte que la différence $p + n - m$ n'aura pas changé. En effet, si la ligne nouvellement tracée va rejoindre un sommet nouveau, c'est-à-dire non encore relié à la figure, le nombre des polygones fermés p ne change pas, mais le nombre n des sommets sera augmenté d'une unité.

Si la ligne nouvelle unit deux sommets appartenant déjà l'un et l'autre à la figure, alors ou elle fermera un polygone non fermé, ou elle divisera un polygone fermé en deux. Dans les deux cas, elle augmentera d'une unité le nombre p des polygones fermés, tandis que le nombre n des sommets n'aura pas changé.

Ainsi le premier membre de l'équation à démontrer ne peut pas être modifié par l'introduction de lignes nouvelles; par la même raison, il ne peut pas être modifié par la suppression de lignes (en tant que cette suppression n'empêche pas la figure de satisfaire aux conditions admises dans la définition du § 26). Or, par l'addition et la suppression d'un nombre convenable de lignes, on peut toujours passer d'une figure ayant n sommets, p polygones fermés et m côtés à une autre figure pour laquelle ces mêmes éléments sont représentés par les lettres n', p', m', et l'on aura

$$p + n - m = p' + n' - m' = \text{const.}$$

Pour avoir la valeur de cette constante, il suffira donc de la cal-

(*) C'est la même relation que celle établie par Euler, entre le nombre des faces, le nombre des sommets et le nombre des arêtes d'un polyèdre. Nous trouverons par la suite beaucoup d'analogies entre les figures que nous étudions et les polyèdres.

culer pour une figure particulière. La figure la plus simple qui satisfasse aux conditions admises au § 26 est celle (*fig.* 13, *Pl. III*) formée par les six lignes qui joignent quatre points d'un plan.

Et comme, pour cette figure, on a

$$n = 4, \quad m = 6, \quad p = 4,$$

d'où

$$p + n - m = 2,$$

cette relation existe pour toutes les figures possibles.

Il est facile de la vérifier pour les diverses figures que nous avons considérées.

Ainsi la *fig.* 15 (*Pl. III*), formée d'un polygone fermé de q côtés et de rayons issus d'un point O, donne

$$m = 2q, \quad n = q + 1, \quad p = q + 1,$$

d'où

$$p + n - m = q + 1 + q + 1 - 2q = 2.$$

La *fig.* 16 (*Pl. V*), formée d'un polygone de q côtés et de rayons issus de O et de O′, donne

$$m = 3q, \quad n = q + 2, \quad p = 2q,$$

d'où

$$p + n - m = 2q + (q + 2) - 3q = 2.$$

La *fig.* 16 (*Pl. V*) donne

$$m = 3q, \quad n = 2q, \quad p = q + 2,$$

d'où

$$p + n - m = (q + 2) + 2q - 3q = 2.$$

Enfin la *fig.* 19 (*Pl. V*) donne

$$m = 25, \quad n = 14, \quad p = 13,$$

d'où

$$p + n - m = 2.$$

Digitized by Google

§ 28.

DIVISION DES FIGURES EN FIGURES DÉFORMABLES, FIGURES STRICTEMENT INDÉFORMABLES ET FIGURES A LIGNES SURABONDANTES. — Nous diviserons les figures que nous aurons à étudier d'abord en deux classes : figures *déformables,* c'est-à-dire dont les angles peuvent varier d'une infinité de manières, les longueurs de leurs côtés demeurant invariables; et figures *indéformables,* c'est-à-dire dont les angles sont déterminés lorsque les longueurs des côtés sont données.

Les figures indéformables comprennent elles-mêmes deux catégories qu'il importe de distinguer : celles qui sont telles qu'elles cessent d'être indéformables lorsqu'on supprime un de leurs côtés seront dites *strictement indéformables,* ou parfois seulement *indéformables;* celles, au contraire, qui ne perdent pas la qualité d'être indéformables lorsqu'on supprime un ou plusieurs de leurs côtés, seront dites à lignes *surabondantes,* parce qu'elles renferment plus de lignes qu'il n'est strictement nécessaire pour les définir.

§ 29.

Théorème. — *Une figure est* en général *déformable, indéformable ou à lignes surabondantes, suivant que le nombre de ses côtés est inférieur, égal ou supérieur au double du nombre de ses sommets diminué de* 3 *unités.*

Ainsi, si m et n désignent, comme précédemment, le nombre des côtés et le nombre des sommets d'une figure, je dis que

Les figures déformables sont caractérisées par..... $m < 2n - 3$;
Les figures strictement indéformables, par..... $m = 2n - 3$;
Les figures à lignes surabondantes, par..... $m > 2n - 3$.

En effet, une figure strictement indéformable contient *tout juste* assez de côtés pour que, les longueurs de ces côtés étant données, elle puisse être construite.

Pour la tracer, portons sur une ligne quelconque une longueur AB égale à l'un des côtés donnés : A et B seront deux sommets; tous les autres sommets étant, par hypothèse, déterminés et *stricte-*

ment déterminés par la connaissance des divers côtés, seront nécessairement définis par l'intersection de deux de ces côtés et *de deux seulement*. Donc, à chacun des $n-2$ sommets autres que ceux A et B, répondront deux côtés, en sorte que le nombre total des côtés de la figure, autres que le côté AB, sera de

$$2(n-2) = 2n-4,$$

et le nombre total m des côtés, y compris celui AB, sera

$$m = 2n-4+1 = 2n-3.$$

Maintenant, étant donnée une figure pour laquelle cette relation est satisfaite, c'est-à-dire une figure strictement déterminée ou strictement indéformable, traçons-y k nouveaux côtés; il est clair que ces k lignes seront surabondantes, et leurs longueurs pourront être exprimées au moyen des m premiers côtés de la figure, puisque ces m côtés suffisent à la définir.

Ainsi, *entre les longueurs des côtés d'une figure pour laquelle on a*

$$m = 2n-3+k,$$

il existe GÉNÉRALEMENT *k relations géométriques nécessaires.*

Si, au contraire, d'une figure strictement indéformable et pour laquelle la relation $m = 2n-3$ est par conséquent satisfaite, on supprimait k lignes, alors le problème consistant à construire la figure restante, connaissant les longueurs de ses $m-k$ côtés, serait indéterminé, c'est-à-dire qu'il existerait une infinité de figures admettant les côtés donnés et ayant toutes des angles différents; en d'autres termes, la figure serait déformable et, pour la rendre strictement indéformable, il faudrait la soumettre à k conditions nouvelles, par exemple, y tracer k nouveaux côtés, formant de nouveaux liens entre ses divers sommets.

On peut résumer toute cette discussion ainsi : m étant le nombre des côtés et n le nombre des nœuds d'une figure, si k désigne un nombre entier positif ou négatif quelconque, on peut toujours poser

$$m = 2n-3+k.$$

Digitized by Google

Il arrive en général :

1° Que la figure est déformable si k est négatif; et, pour qu'elle devienne strictement indéformable, il faut l'assujettir à k conditions;

2° Que la figure est strictement indéformable si $k = 0$;

3° Que la figure est indéformable et contient k lignes surabondantes, c'est-à-dire qu'il existe, entre les longueurs de ses côtés, k relations nécessaires si k est positif.

Exemples. — Dans la *fig.* 15 (*Pl. III*), formée d'un polygone de q côtés ($q = 6$) et de rayons issus du point O, on a

$$m = 2q, \quad n = q + 1,$$

d'où

$$m = 2n - 3 + 1.$$

Cette figure contient donc, quel que soit q, *une* ligne surabondante.

On le vérifie aisément; car, si l'on se donne tous les rayons et tous les côtés du polygone contour sauf un, on a tout juste les données nécessaires pour construire la figure.

La *fig.* 16 (*Pl. V*) donne

$$m = 3q, \quad n = q + 2,$$

d'où

$$m = 2n - 3 + (q - 1),$$

c'est-à-dire qu'elle contient $q - 1$ lignes surabondantes. On voit, en effet, que la figure est déterminée si l'on se donne : 1° tous les rayons issus de O; 2° tous les côtés du polygone contour sauf un; 3° deux des q rayons issus de O'.

Elle contient donc $q - 2$ rayons et un côté du polygone, soit en tout $q - 1$ côtés surabondants.

Dans la *fig.* 16 (*Pl. V*), quel que soit le nombre q des côtés des deux polygones fermés : 1 2 3 4..., 1' 2' 3' 4'..., on a

$$m = 3q, \quad n = 2q,$$

d'où

$$m = 2n - 3 - (q - 3).$$

Donc, si $q > 3$ la figure est déformable; et, pour la rendre tout juste indéformable, il faudrait y tracer $q - 3$ lignes nouvelles. Sur

la figure elle-même où $q = 6$, le nombre des lignes nouvelles à tracer serait $q - 3 = 3$.

La *fig.* 19 (*Pl. V*) donne

$$m = 25 \quad n = 14,$$

d'où

$$m = 2n - 3.$$

Elle doit donc être strictement indéformable, c'est-à-dire contenir tout juste assez de lignes pour pouvoir être construite : c'est ce qu'il est, en effet, aisé de vérifier.

§ 30.

DÉFINITION DES FIGURES RÉCIPROQUES EN GÉNÉRAL. — On appelle, en Géométrie, *figures réciproques* deux figures telles, que la première puisse se déduire de la seconde de la même manière que la seconde se déduit de la première.

L'exemple le plus simple et le plus connu de figures réciproques est celui qui résulte de la transformation dite par *rayons vecteurs réciproques*. Soit (*fig.* 18, *Pl. V*) une ligne plane ou gauche MN. Joignons-en tous les points m à un point fixe O; les lignes Om sont ce qu'on appelle des *rayons vecteurs*. Prenons sur chaque rayon vecteur une longueur Om_1, telle que le produit

$$(a) \qquad Om \times Om_1 = a^2 = \text{const.}$$

Le lieu des points m_1 formera une nouvelle ligne $M_1 N_1$.

Maintenant transformons de la même manière la ligne $M_1 N_1$, c'est-à-dire prenons sur chaque rayon Om_1 prolongé au besoin une longueur Om_2, telle que le produit

$$(b) \qquad Om_1 \times Om_2 = a^2.$$

Nous aurons un nouveau lieu formé par les points m_2; mais des relations (a) et (b) on déduit évidemment

$$Om_2 = Om,$$

c'est-à-dire que, par la seconde transformation, on retombe sur la

ligne donnée. Ces deux lignes forment donc des figures réciproques. L'une d'elles est dite la transformée de l'autre par *rayons vecteurs réciproques*.

On peut transformer de même les surfaces.

Une autre catégorie de figures réciproques, très-usitée en Géométrie et qui a infiniment plus d'analogie avec celle que nous aurons à considérer ici, est connue sous le nom de *figures polaires réciproques*. La théorie des figures polaires réciproques a été donnée, en 1822, par Poncelet, dans son *Traité des propriétés projectives*. En 1828, M. Chasles en a fait une application très-remarquable qu'il a appelée la *transformation parabolique*. Nous montrerons plus loin, pour ceux de nos lecteurs qui sont au fait de ces théories, que la théorie des figures de la Statique graphique se déduit, d'une façon en quelque sorte immédiate, de la transformation parabolique de M. Chasles.

§ 31.

DÉFINITION DES FIGURES RÉCIPROQUES USITÉES EN STATIQUE GRAPHIQUE. — Deux figures de la nature de celles définies au § 26 seront dites, par nous, *réciproques* lorsqu'elles satisferont aux conditions suivantes :

1° Qu'à chaque côté de l'une d'elles correspoude un côté de l'autre, et un seul;

2° Que deux côtés correspondants soient dirigés suivant des lignes parallèles;

3° Qu'à chaque système de lignes concourantes (à chaque nœud) de l'une des figures correspondent dans l'autre les côtés d'un polygone fermé.

Remarque I. — La condition 2° peut, sans inconvénient, être remplacée par celle-ci : que deux côtés correspondants soient dirigés suivant des lignes formant entre elles un angle constant quelconque. Il est évident, en effet, que, quand toutes les lignes d'une figure font un même angle avec les lignes correspondantes de l'autre, il suffit de faire tourner l'une d'elles de cet angle pour rendre deux lignes correspondantes quelconques parallèles entre elles.

Habituellement nous considérerons les figures réciproques dans

des positions telles, que les lignes correspondantes soient parallèles; mais parfois il nous sera plus commode de les supposer placées de façon que ces lignes soient deux à deux dans des directions perpendiculaires. C'est ce que nous avons déjà fait, au § 18, dans le cas particulier de la figure formée par les six lignes qui joignent quatre points.

Remarque II. — On observera que, dans la définition de la figure réciproque d'une figure donnée, il n'entre aucune condition métrique, c'est-à-dire aucune condition qui fixe *à priori* les grandeurs relatives de deux lignes correspondantes.

Il résulte de là que, si deux figures sont réciproques, toutes les figures semblables à l'une d'elles sont aussi des figures réciproques de l'autre. A ce point de vue, on peut dire que, quand une figure admet une figure réciproque, elle en admet par cela même une infinité d'autres issues de celle-là par voie de similitude. Mais comme toutes ces figures ne diffèrent entre elles que par *l'unité* que l'on a choisie pour mesurer les grandeurs de leurs lignes, ou si l'on veut, par *l'échelle* à laquelle elles sont tracées, elles ne constitueront pour nous qu'une *solution unique;* et quand nous dirons qu'une figure donnée admet deux ou plusieurs ou une infinité de figures réciproques, il faudra entendre par là deux ou plusieurs ou une infinité de figures *non semblables* entre elles.

§ 32.

UNE FIGURE DONNÉE N'ADMET PAS NÉCESSAIREMENT UNE FIGURE RÉCIPROQUE. — Une figure composée de lignes reliant entre elles des points distribués d'une manière quelconque dans un plan n'admet pas nécessairement une figure réciproque. Il est facile de voir que les conditions restrictives que nous avons admises au § 26, en définissant les figures dont on s'occupe ici, sont des conditions *nécessaires* pour qu'elles admettent des figures réciproques.

En effet, un côté quelconque d'une figure, celui, par exemple, qui est placé entre deux sommets A et B, aura nécessairement pour correspondant dans la figure réciproque, si elle existe, un côté commun à deux polygones fermés; car, puisque la ligne AB appartient au faisceau de lignes concourant en A, sa ligne réciproque fera partie du polygone fermé correspondant au nœud A; par la

même raison, elle fera partie du polygone fermé répondant au nœud B. Elle sera donc bien commune à ces deux polygones. S'il y avait un troisième sommet sur le côté AB, le côté correspondant ferait partie de trois polygones fermés ; mais nous avons vu au § 26 que, quelle que soit une figure donnée (F), on peut toujours convenir qu'un côté ne passera que par deux sommets ; d'où il résulte que dans la figure réciproque (F_1) un côté quelconque fera partie de deux polygones fermés et de deux seulement ; mais, comme la figure (F) est de même réciproque de (F_1), il s'ensuit que dans cette figure donnée (F) chaque côté doit également faire partie de deux polygones fermés et de deux seulement. Ainsi cette condition, que nous nous sommes imposée au début, doit être nécessairement remplie par toute figure pour qu'elle admette une figure réciproque.

Maintenant, puisque, dans toute figure donnée (F), un côté fait nécessairement partie de deux polygones fermés, et qu'un polygone fermé ne peut avoir moins de trois côtés, il s'ensuit qu'en tout sommet de la figure réciproque (F_1) doivent concourir au moins trois côtés ; et, à cause de la réciprocité des figures (F) et (F_1), cette même condition doit être remplie par la figure donnée. Ainsi toutes les conditions que nous nous sommes imposées au commencement de ce Chapitre sont nécessaires à l'existence des figures réciproques ; mais ces conditions ne sont pas en général suffisantes. C'est ce que nous allons d'abord montrer sur des exemples simples avant de l'établir d'une manière générale.

Prenons (*Pl. III, fig.* 13) la figure très-simple formée par les six lignes 1, 2, 3, 4, 5 et 6 qui joignent quatre points deux à deux. Pour construire sa réciproque, nous remarquerons d'abord que le triangle formé par les lignes 1, 2, 3 aura pour figure correspondante un nœud. Donc, à partir d'un point quelconque *d'* du plan, nous mènerons (*fig.* 13) trois lignes indéfinies 1, 2, 3 respectivement parallèles aux trois côtés de ce triangle. Maintenant les lignes 2, 5, 1, formant un nœud, auront pour réciproque un polygone fermé de trois côtés, c'est-à-dire un triangle. Nous avons les directions de deux côtés 1 et 2 de ce triangle ; on devra donc inscrire entre ces deux lignes une droite 5 de longueur d'ailleurs quelconque, parallèle à 5. La longueur de cette droite 5 est arbitraire, parce que, comme nous l'avons déjà fait observer,

la définition des figures réciproques ne comporte aucune condition se rapportant aux longueurs relatives des côtés correspondants.

Les trois lignes 2, 6, 3 formant de même un nœud, les trois lignes correspondantes doivent former un triangle. De ce triangle nous connaissons le côté 2 en grandeur et en direction, le côté 3 en direction. Donc, pour avoir la ligne correspondant à 6, il nous suffira, par l'extrémité du côté 2, de conduire une ligne 6 parallèle à 6 jusqu'à la rencontre de 3.

Enfin, de même la ligne 4 correspondant à 4 devra former un triangle avec les côtés 1 et 3. Donc, pour avoir 4, nous devrons joindre les deux extrémités *l'une* et *l'autre connues* des côtés 1 et 3. Mais, pour que la figure ainsi tracée soit effectivement réciproque de la proposée, il faut que cette ligne 4, qui se trouve complétement déterminée par les cinq autres lignes de la figure, soit parallèle au côté 4 auquel elle doit correspondre.

Rien ne prouve *à priori* qu'il en soit ainsi.

Cela montre bien que le tracé de la figure réciproque d'une figure donnée peut être sujet à des conditions. Dans l'exemple particulier qui nous occupe, nous savons (§ 18) que le côté 4 est bien réellement parallèle à 4, c'est-à-dire que la figure réciproque de la proposée existe.

Considérons encore (*fig.* 15, *Pl. III*) une figure formée par un polygone fermé de q côtés ($q = 6$), et par les rayons joignant les sommets du polygone à un point C.

Pour construire la réciproque de cette figure, nous remarquerons qu'au polygone fermé donné doit correspondre un nœud; donc, d'un point arbitraire O (*fig.* 15), nous mènerons des rayons

$$01, \quad 02, \quad 03, \ldots,$$

respectivement parallèles aux côtés

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

du polygone donné.

Maintenant, en chacun des nœuds tels que m placés aux sommets de ce dernier polygone, concourent trois lignes. Les figures réciproques de ces nœuds doivent être des polygones fermés de trois côtés, c'est-à-dire des triangles. Nous connaissons déjà les lignes réciproques de deux des trois lignes aboutissant en un

nœud m, à savoir : les lignes réciproques O1 et O2 des côtés 1 et 2 du polygone donné. Il suffira donc de construire le troisième; pour cela, partant d'un point 1, on mènera successivement les côtés

$$12,\quad 23,\quad 34,\ldots,$$

respectivement parallèles aux rayons

$$C12,\quad C23,\quad C34,\ldots$$

de la figure donnée; mais, pour que la figure réciproque existe, il faut que le polygone 1 2 3 4,... se ferme, puisqu'il est la réciproque du nœud C; or cela constitue une condition. Nous avons vu (§ 25, *Rem. I*) qu'elle est toujours remplie, de sorte qu'ici encore la figure réciproque existe, et la remarque du § 25 peut être énoncée ainsi :

Une figure formée par un polygone fermé d'un nombre quelconque de côtés et de rayons, issus d'un point et aboutissant aux sommets de ce polygone, admet toujours une figure réciproque et une seule.

Voici maintenant des exemples de figures n'admettant pas de figures réciproques ou en admettant une infinité.

Soit (*fig.* 17, *Pl. IV*) une figure formée 1° de deux polygones fermés

$$8\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8$$

et

$$8'\ 1'2'3'4'5'6'7'8',$$

que nous appellerons, pour abréger, les polygones A et A'; 2° des lignes

$$11',\ 22',\ 33',\ 44',\ 55',\ 66',\ 77',\ 88',$$

réunissant deux à deux les sommets de ces polygones.

Essayons de construire la figure réciproque.

Nous commencerons par construire le nœud répondant au polygone fermé A. Pour cela, d'un point quelconque O (*fig.* 17), nous mènerons des lignes indéfinies parallèles aux côtés de ce polygone.

Nous construirons ensuite les polygones fermés répondant aux nœuds

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Chacun de ces nœuds étant formé de trois lignes, les polygones fermés qui leur correspondent seront des triangles. Deux côtés de

ces triangles seront deux lignes consécutives issues de O; donc pour avoir ces triangles, à partir d'un point a, pris arbitrairement sur l'une des lignes issues de O, par exemple, sur celle qui répond au côté 81, nous mènerons des lignes

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,$$

respectivement parallèles à

$$11',\ 22',\ 33',\ 44',\ 55',\ 66',\ 77',\ 88',$$

nous obtiendrons ainsi un polygone qui devra nécessairement se fermer pour qu'au dernier nœud 8', formé par les lignes

$$88',\ 81,\ 87$$

réponde le triangle formé par celles

$$8,\ 081,\ 087.$$

Or cette condition ne sera pas remplie si la figure 17 a été constituée au hasard. On pourra, dans cette figure, tracer arbitrairement le polygone A; puis, encore arbitrairement, sept des huit lignes 11', 22', 33',...; mais la huitième 88' sera déterminée, puisqu'elle devra passer par le sommet 8 et être parallèle à la ligne 8 qui ferme le polygone tracé sur la figure 17. Cela revient à dire (§ 21) qu'elle doit coïncider avec la résultante des sept premières lignes.

Donc, voilà une première condition sans laquelle la figure donnée 17 n'admettra pas de figure réciproque.

Supposons-la remplie; il nous reste à tracer les polygones fermés réciproques des nœuds

$$1',\ 2',\ 3',\ 4',\ 5',\ 6',\ 7',\ 8'.$$

Chacun de ces nœuds comprenant trois lignes, les polygones réciproques seront des triangles.

Nous connaissons un côté de chacun de ces triangles, à savoir: les lignes 1, 2, 3,... répondant à 1'1, 2'2, 3'3,...; pour tracer le triangle répondant au nœud 1', on devra donc, par le point a, mener une ligne parallèle à A'1' et par le point 1 2 une parallèle à 1'2'. L'intersection de ces deux lignes déterminera un point O'.

Passons au nœud 2'. Nous connaissons deux côtés du triangle réciproque de ce nœud, à savoir :

Digitized by Google

Le côté 2, répondant à 2′2,

Et le côté O′12 répondant à 1′2′;

donc le troisième côté du triangle est déterminé : c'est la ligne O′2 3; et le côté 2′3′ doit être parallèle à cette ligne.

On verrait de même que les côtés suivants du polygone A′ devront tous être parallèles aux rayons issus de O′; donc ce polygone ne peut pas être pris au hasard. Deux de ses côtés seulement sont arbitraires; les lignes réciproques de ces deux côtés déterminent un point O′ et tous les autres côtés sont déterminés, puisqu'ils doivent être parallèles aux rayons issus de O′ et que les sommets du polygone A′ doivent être sur les lignes données 11′, 22′, 33′,....

On voit donc qu'en général la *fig.* 17 n'admet pas de figure réciproque; pour qu'elle en admette une, il faut s'imposer les conditions suivantes : 1° le polygone A étant donné à volonté, ainsi que sept des huit lignes 11′, 22′,..., la huitième doit être (§ 21, *Rem. I*) la *résultante* des autres. Cette condition entraîne comme conséquence que le polygone A est un polygone funiculaire du système de lignes 11′, 22′,...; 2° le polygone A′ doit alors être un second polygone funiculaire de ce système de lignes.

Ces conditions peuvent s'exprimer plus simplement et sans avoir recours au polygone des lignes, en remarquant qu'un polygone A étant funiculaire, pour qu'un second polygone A′ le soit aussi, il faut et il suffit que les points d'intersection des couples de côtés correspondants des deux polygones soient en ligne droite (§ 20, *Rem. II*).

D'après cela, le polygone fermé A et sept des huit lignes 11′, 22′,... étant donnés arbitrairement, on tracera le polygone A′ de façon que les points d'intersection de ses côtés avec les côtés correspondants de A soient placés sur une ligne droite quelconque ZZ_1; et alors la condition que la huitième ligne, joignant les sommets correspondants 8 et 8′ des deux polygones, soit dirigée suivant la résultante des sept autres se trouvera remplie d'elle-même (§ 21).

Ainsi

Pour qu'une figure composée de deux polygones fermés d'un même nombre de côtés dont les sommets sont placés sur des lignes données admette une figure réciproque, il faut et il suffit que les points d'intersection des côtés correspondants des deux poly-

gones (c'est-à-dire des côtés compris entre les mêmes lignes) *soient placés en ligne droite.*

On peut enfin énoncer encore cette proposition plus simplement ainsi :

Pour qu'une figure, composée comme il vient d'être dit, admette une figure réciproque, il faut et il suffit qu'elle puisse être considérée comme la projection d'un polyèdre à faces planes.

Car considérons deux plans P et P′; dans le dernier, traçons un polygone fermé $\mathcal{A}'$. Par chacun des côtés de ce polygone, faisons passer un plan quelconque; ces divers plans déterminent sur P un second polygone fermé $\mathcal{A}$. Ces plans pourront d'ailleurs être regardés comme formant la surface latérale d'un polyèdre dont les plans contenant les polygones $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ seraient les bases. Les points d'intersection des couples de côtés correspondants des polygones $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont évidemment sur une même ligne droite, à savoir : sur la ligne d'intersection des plans P et P′; donc, si l'on projette un tel polyèdre sur un plan quelconque, on aura une figure remplissant les conditions voulues pour admettre une figure réciproque; et inversement toute figure de la nature de celles dont nous nous occupons ici susceptible d'admettre une figure réciproque peut être regardée comme la projection d'un polyèdre composé, comme il vient d'être dit.

§ 33.

Nous venons de voir des exemples de figures n'admettant pas de figure réciproque ou n'en admettant qu'une.

Si, au lieu de partir de la figure 17 qui n'admet la réciproque 17 que sous certaines conditions, on partait, au contraire, de cette dernière, on reconnaîtrait sans difficulté qu'elle admet toujours une infinité de figures réciproques. Si, par exemple, conservant le polygone A, on substituait au polygone A′ relatif au pôle O′ tout autre polygone funiculaire relatif au même pôle, ayant par conséquent ses côtés parallèles aux côtés de A, on aurait une nouvelle figure distincte de celle 17, c'est-à-dire non semblable à celle-ci et également réciproque de la figure donnée 17.

§ 34.

CONDITIONS GÉNÉRALES DE POSSIBILITÉ, D'IMPOSSIBILITÉ OU D'INDÉTERMINATION DU PROBLÈME DE LA RECHERCHE DE LA FIGURE RÉCIPROQUE D'UNE FIGURE DONNÉE. — Essayons maintenant de définir d'une manière générale les caractères auxquels on peut reconnaître si une figure donnée admet une figure réciproque, ou n'en admet pas, ou en admet une infinité.

THÉORÈME. — *Pour qu'une figure admette une figure réciproque et une seule, il faut* en général *et il suffit qu'elle contienne* une *ligne surabondante.*

Si elle n'en contient pas, c'est-à-dire si elle est strictement indéformable, elle ne peut admettre une figure réciproque que si elle satisfait à une *condition.*

Si elle est déformable, elle ne peut admettre de figure réciproque que si elle satisfait à autant de conditions plus une qu'il faudrait y tracer de lignes nouvelles pour la rendre strictement indéformable.

Si, au contraire, elle contient k lignes surabondantes, elle admet une $(k-1)^{\text{tuple}}$ *infinité de figures réciproques.*

Pour qu'une figure soit réciproque d'une figure donnée, il faut 1° que les deux figures ou diagrammes contiennent un même nombre de côtés; 2° qu'à chacun des nœuds du diagramme donné corresponde un polygone fermé du diagramme réciproque; 3° qu'inversement à chacun des polygones fermés du diagramme donné corresponde un nœud du diagramme réciproque.

Je dis que cette dernière condition peut toujours être satisfaite quand il est possible de satisfaire aux deux premières. Supposons, en effet, qu'étant donnée une figure composée de m côtés on ait pu, par un moyen quelconque, déterminer m longueurs correspondant à ces côtés et telles qu'en portant bout à bout celles qui répondent à un quelconque des nœuds du diagramme donné on obtienne un polygone fermé. Je dis qu'avec ces lignes *disposées convenablement* on pourra toujours former un diagramme réciproque du diagramme donné. Pour le démontrer, observons d'abord que, puisque, par hypothèse, les longueurs répondant à un quel-

conque des nœuds du diagramme donné, étant portées bout à bout forment un polygone fermé, elles formeront un tel polygone, quel que soit l'ordre dans lequel elles se succéderont (§ 4, *Rem.*). Or soit (*fig.* 20, *Pl. V*) A un quelconque des côtés d'une figure donnée aboutissant à deux sommets q et p, en chacun desquels concourent un certain nombre d'autres côtés B, B_1, B_2,..., D, D_1, D_2,.... Soient a, b, b_1, b_2,...; d, d_1, d_2, d_3,... les longueurs correspondant aux côtés A, B, B_1, B_2,..., D, D_1, D_2,..., longueurs calculées de façon que celles qui répondent aux deux nœuds q et p donnent, lorsqu'elles sont portées bout à bout, deux polygones fermés ayant le côté a en commun. Afin de disposer les côtés de ces polygones dans l'ordre voulu pour obtenir le diagramme réciproque, conduisons la ligne mn égale à la longueur a et parallèle à A, et cherchons d'abord à construire le polygone fermé répondant au nœud q. Pour cela, à partir de m il faudra porter l'une des longueurs d, d_1, d_2, d_3,.... Pour savoir laquelle il convient de porter d'abord, nous remarquerons que le côté A fait partie de deux polygones fermés (§ 26). Dans chacun de ces polygones entre nécessairement l'un des côtés autres que A, aboutissant en q. Soit D le côté qui fait partie de l'un des deux polygones où entre A. Nous porterons, à partir de m, d'abord la longueur d correspondant à ce côté D, parce que D et A faisant partie d'un même polygone du diagramme donné doivent, dans le diagramme réciproque, faire partie d'un même nœud m. Le côté D, à son tour, d'après la définition de nos figures, fait partie d'un second polygone autre que celui qui contient A. Dans le périmètre de ce polygone, entrera nécessairement un des côtés D_1, D_2,..., autres que A. Soit D_3 ce côté. Nous porterons d_3 au bout de d. De cette façon, les côtés D et D_3, qui, dans le diagramme primitif, font partie d'un même polygone, concourront dans le diagramme réciproque en un même sommet i. A son tour, le côté D_3 fait partie d'un polygone autre que celui où entre D. Soit D_1 le second côté de ce polygone passant par le point q. Nous porterons d_1 au bout de d_3. Enfin D_2 étant un côté du second des polygones dont fait partie A, nous porterons d_2 au bout de d_1; nous obtiendrons ainsi le polygone $a\,d\,d_3\,d_1\,d_2\,a$, disposé de manière que les deux côtés qui aboutissent à *chacun* de ses sommets correspondent à deux côtés d'*un des polygones fermés du diagramme primitif*.

Nous constituerons, d'après les mêmes règles, le second des

polygones fermés dont fait partie a et qui répondra au nœud p. Si le côté B, par exemple, fait partie d'un même polygone avec A et D, la ligne b doit passer par l'intersection des lignes a et d. Maintenant le côté B fait partie d'un second polygone, lequel contiendra B_1 ou B_2 (en supposant, pour fixer les idées, que les lignes B, B_1, B_2 soient au nombre de trois seulement), admettons que ce soit B_1. Nous porterons donc b_1 au bout de b. Enfin le côté B_1 faisant partie d'un second polygone où entre nécessairement B_2, b_2 devra être porté au bout de b_1 et aboutir au nœud n.

Nous avons ainsi pris un quelconque des côtés A d'une figure, et nous avons constitué les deux polygones fermés dont la longueur correspondante a fait partie, de telle façon qu'en chacun des sommets de ces polygones *ne concourent que des droites appartenant à un même polygone fermé du diagramme primitif*. En faisant la même opération successivement pour tous les côtés du diagramme primitif, on formera un nouveau diagramme dont *tous* les nœuds répondront à des polygones fermés; et comme, par hypothèse, les polygones fermés de ce diagramme répondent à des nœuds, ce sera bien le diagramme réciproque du proposé.

Ainsi donc, pour constituer le diagramme réciproque d'une figure donnée, il suffit de déterminer les m côtés de ce diagramme réciproque par la condition que les côtés répondant à chacun des n nœuds du diagramme primitif forment des polygones fermés. Or, pour que q lignes données en grandeur et en direction forment un polygone fermé, il faut qu'elles satisfassent à deux conditions, l'une d'elles exprimant que la ligne fermant le polygone formé par $q-1$ d'entre elles a même direction que la $q^{ième}$, l'autre qu'elle a même grandeur. Donc, pour que les n nœuds du diagramme donné fournissent, dans le diagramme réciproque, n polygones fermés, il faudra que les côtés du nouveau diagramme satisfassent à $2n$ conditions. Mais il est aisé de voir que ces $2n$ conditions se réduisent à $2n-3$.

En effet, exprimons d'abord que $n-2$ des n sommets du diagramme primitif donnent, dans le diagramme réciproque, des polygones fermés. Construisons ces $n-2$ polygones fermés en suivant les règles ci-dessus indiquées.

Soient (*fig.* 20 et 20) q et p les deux sommets laissés de côté dans le diagramme primitif, et soit A la ligne qui les joint; la réci-

proque, de cette ligne, dans le diagramme réciproque fera partie de deux polygones. Les côtés de l'un de ces polygones seront les lignes $d, d_1, d_2, \ldots$, réciproques du nœud q. Toutes ces lignes feront partie des $n-2$ polygones fermés que nous avons tracés, en sorte que toutes se trouveront sur le diagramme formé par ces polygones; et, pour avoir le diagramme complet que nous cherchons, il suffira d'y tracer la ligne a répondant à A. Or cette ligne A fait partie de deux polygones : l'un contient, par exemple, les lignes D et B, l'autre les lignes D_2 et B_2. Donc la ligne a s'obtiendra en joignant le point d'intersection des lignes d et b à celui des lignes d_2 et b_2. La ligne a se trouve ainsi *complétement déterminée* par le tracé des $n-2$ polygones et le diagramme complété par l'addition de cette ligne sera réciproque du proposé, *pourvu que cette ligne a soit parallèle à* A. Or cela constitue une seule condition. Nous avons précédemment exprimé que $n-2$ polygones sont fermés, ce qui vaut $2n-4$ conditions. Donc le nombre total de conditions pour que le diagramme proposé admette une figure réciproque est de

$$2n-4+1=2n-3.$$

Les $2n-3$ relations algébriques que l'on obtiendrait en exprimant ces conditions ont lieu entre les m longueurs inconnues des côtés du diagramme réciproque cherché, ou plutôt entre les $m-1$ rapports de $m-1$ de ces longueurs à l'une d'entre elles, puisque (§ 31) les longueurs absolues des côtés d'une figure réciproque ne sont pas définies, mais seulement leurs rapports à l'une d'entre elles.

De là résulte :

1° Que si

$$m-1=2n-3 \quad \text{ou} \quad m=2n-3+1,$$

le problème est en général possible et déterminé. Or la dernière relation indique (§ 29) une figure contenant *une* ligne surabondante, ce qui établit la première partie de la proposition que nous avions en vue.

Maintenant si la figure donnée est strictement indéformable, c'est-à-dire si

$$m=2n-3 \quad \text{ou} \quad m-1=2n-4,$$

nous aurons une équation de plus que le nombre de nos inconnues et le problème sera impossible, à moins qu'*une* de ces équations soit satisfaite d'elle-même en vertu des autres, ce qui exige que la figure donnée ne soit pas quelconque, qu'elle satisfasse à une certaine condition.

Si la figure est déformable, c'est-à-dire si

$$m = 2n - 3 - k,$$

k étant un nombre positif, ou

$$m - 1 = 2n - 3 - (k + 1),$$

nous aurons $k + 1$ équations de trop, et la figure donnée n'admettra une réciproque que si elle satisfait à $k + 1$ conditions.

Si, au contraire, la figure contient k lignes surabondantes, c'est-à-dire si

$$m = 2n - 3 + k \quad \text{ou} \quad m - 1 = 2n - 3 + k - 1,$$

il y a $k - 1$ conditions de moins à remplir que le nombre des inconnues; donc $k - 1$ de ces inconnues peuvent être prises arbitrairement, et le problème admet une $(k - 1)^{tuple}$ infinité de solutions.

§ 35.

AUTRE MANIÈRE D'EXPRIMER LES CONDITIONS QUI PRÉCÈDENT. — *Une figure admet en général une figure réciproque, ou une infinité ou pas du tout, suivant que le nombre de ses sommets est égal, inférieur ou supérieur à celui de ses polygones fermés.*

En effet, la relation

$$p + n - m = 2$$

du § 27 montre que, si $n = p$, on a

$$m = 2n - 2,$$

condition trouvée pour la possibilité du problème.

Si

$$n = p + k,$$

k étant positif,

$$m = 2n - 2 - k,$$

relation indiquant que le problème est impossible, à moins de k conditions.

Si, au contraire,

$$p = n + k,$$

on a

$$m = 2n - 2 + k,$$

indiquant l'indétermination de k manières différentes.

§ 36.

Ces résultats sont d'accord avec les cas particuliers que nous avons traités plus haut.

1° Nous avons vu que la figure formée par les six lignes joignant quatre points, ou plus généralement que la figure formée par un polygone fermé quelconque dont on a joint les sommets à un point fixe contient une ligne surabondante, ou, en d'autres termes, autant de sommets que de polygones fermés. Donc, d'après le théorème général du § 35, elle doit toujours admettre une figure réciproque. C'est, en effet, ce que nous avons établi directement.

2° Une figure formée par deux polygones de q côtés (*fig.* 17, *Pl. IV*, ou *fig.* 16, *Pl. V*), dont les sommets sont sur q lignes données, renferme $p = q + 2$ polygones et $n = 2q$ sommets, d'où $n > p$ et $n - p = q - 2$.

Donc une telle figure ne peut admettre une figure réciproque que si elle satisfait à $q - 2$ conditions. Ces conditions, que spécifie le théorème établi au § 32, sont bien en effet au nombre de $q - 2$.

3° Une figure (*fig.* 17, *Pl. IV*, ou *fig.* 16, *Pl. V*) formée d'un polygone fermé de q côtés, dont les sommets sont réunis à deux points O et O′, comprend $p = 2q$ polygones fermés et $n = q + 2$ sommets. Donc, à l'inverse de l'exemple ci-dessus, on a ici

$$p > n \quad \text{et} \quad p - n = q - 2,$$

et le problème est indéterminé. C'est, en effet, ce que nous avons vu, et le théorème général nous apprend qu'il l'est de $q - 2$ ma-

nières différentes, ce qui se vérifie de suite, si l'on se rappelle que les diagrammes de la forme de la figure 16 sont réciproques de ceux ayant la forme de la figure 16; et comme ceux-ci exigent $q-2$ conditions pour que leurs réciproques existent, ceux-là doivent, au contraire, admettre une $(q-2)^{uple}$ infinité de figures réciproques.

§ 37.

SUR UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME DE LA RECHERCHE DES FIGURES RÉCIPROQUES. — Les règles qui précèdent peuvent pourtant comporter certaines exceptions. Il en est une qui mérite d'être particulièrement signalée, car d'elle découle en quelque sorte toute la Statique graphique.

Considérons (*fig.* 64, *Pl. XIII*) une figure quelconque (F). Par i de ses sommets menons un système de lignes S, et construisons un polygone fermé P de i côtés ayant ses sommets sur les lignes S. Cherchons les conditions pour que le diagramme ainsi formé, que nous appellerons (F_1), admette un diagramme réciproque.

La figure donnée (F) sera, par exemple, celle formée par les lignes 11, 12, 13, 14,..., 26, 27 de la figure 64; les lignes S qu'on y trace sont les lignes 1, 2, 3, ..., 10 : ces lignes sont reliées dans la figure par le polygone fermé P de 10 côtés indiqué en pointillé.

Soient généralement m le nombre des lignes et n le nombre des sommets de la figure (F). Posons

$$(a) \qquad m = 2n - 3 + k,$$

en sorte que (§ 29) la figure est déformable de k manières différentes si k est négatif, strictement indéformable si $k = 0$, et à k lignes surabondantes si k est positif.

Soient m' le nombre des côtés et n' le nombre des sommets de la figure complète (F_1), après l'addition des lignes S et du polygone P. On aura

$$n' = n + i; \quad m' = m + 2i,$$

d'où, en vertu de la relation (a),

$$(b) \qquad m + 2i = 2(n + i) - 3 + k \quad \text{ou} \quad m' = 2n' - 3 + k,$$

Digitized by Google

ce qui indique que la figure complète (F_1), y compris les $2i$ lignes que nous avons ajoutées, est déformable de k manières, strictement indéformable, ou à k lignes surabondantes suivant que la figure primitive (F) est elle-même dans l'un ou l'autre de ces trois cas.

Ceci posé, le fait particulier qui se présente ici, c'est que la construction de la figure réciproque de (F_1) exige *toujours* au moins une condition, quel que soit k, alors même que $k = 1$ et que, par suite, il semblerait, d'après le théorème du § 34, que le diagramme réciproque dût être possible sans condition. En effet, pour construire le diagramme réciproque de (F_1) d'un point O (*fig.* 64), on mènera des parallèles aux côtés du polygone P, de façon à former le nœud réciproque de ce polygone; puis on construira les polygones fermés, réciproques des nœuds partant des divers sommets de ce polygone. Comme ces nœuds sont à trois côtés, leurs polygones réciproques seront des triangles. Chacun de ces triangles comprenant deux rayons issus de O parmi ses côtés, on fermera ces triangles en conduisant les lignes 1, 2, 3,... (dont la première est de grandeur quelconque) respectivement parallèles aux lignes S, ou **1**, **2**, 3,..., de la figure 64.

Le polygone **1 2** 3... devra nécessairement se fermer pour que le dernier triangle, celui qui a pour base la ligne 10, soit réciproque du nœud du polygone P comprenant la ligne **10**. Cela exige que les $2i$ lignes additionnelles satisfassent à *une* condition, condition *indépendante de la forme de la figure primitive* (F) et subsistant quelle que soit cette figure, quelle que soit, par conséquent, la valeur de k.

On peut reconnaître l'existence de cette condition encore autrement et par des considérations analogues à celle du § 34. Supposons, en effet, obtenus par un moyen quelconque les m' côtés du diagramme réciproque cherché, ou plutôt les $m' - 1$ rapports de ces côtés à l'un d'entre eux; ils doivent satisfaire à $2n' - 3$ conditions (§ 33). Or, fermer les i triangles répondant aux i nœuds qui composent le polygone P, c'est remplir (§ 34) $2i$ conditions. Mais, en raison de cette circonstance particulière que les i nœuds ne comprennent que $2i$ côtés, on ne dispose, pour satisfaire aux $2i$ conditions dont il s'agit, que de $2i - 1$ quantités, à savoir les rapports de $2i - 1$ des longueurs du diagramme réciproque à l'une d'entre elles. Pour qu'avec ces $2i - 1$ quantités on puisse remplir $2i$ condi-

tions, il faut que la figure soit telle qu'une de ces conditions soit remplie d'elle-même quand les $2i - 1$ autres le sont.

Maintenant ces $2i$ conditions remplies au moyen de $2i - 1$ des longueurs du diagramme réciproque, il reste à remplir $2n' - 3 - 2i$ autres conditions, et l'on disposera pour cela de $m' - 1 - (2i - 1) = m' - 2i$ quantités. Donc, le problème est possible et déterminé si

$$m' - 2i = 2n' - 2i - 3;$$

indéterminé si

$$m' - 2i > 2n' - 2i - 3;$$

impossible, à moins de conditions à remplir par la figure primitivement donnée (F), si

$$m' - 2i < 2n' - 2i - 3.$$

Or, en vertu des relations (b), on a

$$m' - 2i = 2n' - 2i - 3 + k.$$

Donc le problème est possible sans condition autre que celle indiquée de la fermeture du polygone 1 2 3,..., si $k = 0$; indéterminé de k manières si k est positif; impossible, à moins que la figure proposée ne remplisse k conditions nouvelles, si k est négatif. Si ces k conditions sont remplies, le problème devient alors possible et déterminé.

Si l'on regarde (§ 3) le polygone 1 2 3..., réciproque des lignes S comme le polygone de ces lignes, alors le polygone P sera (§ 19) leur polygone funiculaire relatif au pôle O; la condition que le polygone 1 2 3... soit fermé, ainsi que le polygone P, équivaut donc (§ 25) à celle-ci : que l'une des i lignes S soit la résultante des autres.

On peut donc dire :

Étant donnée une figure quelconque (F), *si par i de ses sommets on mène un système de i lignes* S *et qu'on les relie par un polygone fermé* P *de façon à former une nouvelle figure* (F_1), *pour que cette nouvelle figure admette un diagramme réciproque, il faut que l'une des lignes* S *soit la résultante des autres, et cela, quelle que soit la figure primitivement donnée.*

Cette condition remplie, le problème est indéterminé si la figure (F) *contient des lignes surabondantes; possible et déter-*

Digitized by Google

miné si elle est strictement indéformable; enfin impossible à moins de k conditions nouvelles à remplir par la figure (F), *si elle est déformable de k manières.*

Remarque. — Pour que l'une des lignes S soit la résultante des autres, il faut (§ 25) trois conditions, si le polygone de ces lignes est donné d'avance. Ainsi :

Si l'on veut que non-seulement la figure (F_1) admette un diagramme réciproque, mais qu'encore, dans ce diagramme, entre un polygone des lignes S donné d'avance, trois conditions sont toujours nécessaires.

Ces conditions remplies, le problème est indéterminé si la figure primitive (F) contient des lignes surabondantes; possible et déterminé si cette figure est strictement indéformable; enfin impossible, mais devenant possible et déterminé moyennant k conditions nouvelles, soit en tout $k+3$, si cette figure est déformable de k manières.

Digitized by Google

DEUXIÈME SECTION.

PRINCIPES DE STATIQUE GRAPHIQUE.

CHAPITRE IV.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE GRAPHIQUES DES FORCES DISTRIBUÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS UN PLAN. — LE POLYGONE DES FORCES ET LES POLYGONES FUNICULAIRES CONSIDÉRÉS AU POINT DE VUE MÉCANIQUE.

§ 38.

DOUBLE OBJET DE LA STATIQUE GRAPHIQUE. — La Statique graphique a un double objet :

1° Tracer des règles géométriques simples permettant d'effectuer la composition et la décomposition des forces et de trouver leurs conditions d'équilibre;

2° Déterminer, également par des procédés graphiques, les *actions intérieures* que des forces données font naître dans les corps sur lesquels elles s'exercent, lorsque ces corps se réduisent à de simples barres, comme cela a lieu dans les charpentes, ponts métalliques, etc.

On comprend combien ce second problème est important.

Comme la matière n'offre qu'une résistance limitée, chaque fois que des corps doivent demeurer en équilibre sous l'action de certaines forces, il faut les disposer de façon que les actions mutuelles qu'ils exercent les uns sur les autres ne dépassent pas la limite de leur résistance possible. La recherche de ces actions mutuelles, même quand les corps se réduisent à de simples barres, est souvent au-dessus des forces de la Statique et exige l'intervention de la théorie

mathématique de l'élasticité. Nous en donnons alors la solution dans le Mémoire qui fait suite à cet Ouvrage; mais, dans un grand nombre de cas (et il ressort du Mémoire auquel nous venons de faire allusion que les meilleures constructions doivent être disposées de façon qu'il en soit ainsi), la Statique seule permet de découvrir les actions dont il s'agit. La Statique ordinaire se prête peu à ce genre de recherches en raison de la longueur des calculs qu'elle exige. Au contraire, la Statique graphique en fournit une solution géométrique simple et des plus faciles à appliquer, surtout lorsqu'il s'agit de forces toutes situées dans un plan; et c'est ce qui a presque toujours lieu dans les constructions.

Comme la Statique ordinaire, la Statique graphique débute par l'étude des conditions d'équilibre des forces agissant sur des systèmes invariables. De tels systèmes n'existent pas dans la nature; mais les conditions auxquelles satisfont les forces qui les maintiennent en équilibre doivent, comme on sait, être remplies toujours par quelque système que ce soit (*).

§ 39.

REPRÉSENTATION DES FORCES EN STATIQUE GRAPHIQUE. — En Statique graphique un système de forces est représenté par deux figures distinctes : l'une contient les lignes *indéfinies* suivant lesquelles les forces sont dirigées et agissent, et qu'on appelle *leurs lignes d'action;* dans l'autre, on porte bout à bout des longueurs proportionnelles aux forces données, de même direction et de même sens que ces forces. On forme ainsi un contour polygonal qui, d'après les dénominations purement géométriques employées jusqu'ici, serait le *polygone des lignes* représentatives des forces, mais qui, en réalité, n'est autre que le *polygone des forces*, tel qu'on l'emploie aussi en Statique ordinaire; mais la Statique graphique en tire, comme nous le verrons plus loin, un tout autre parti.

Habituellement, nous représenterons les lignes d'action des forces

(*) En effet, si un système, quel qu'il soit, est actuellement en équilibre, cet équilibre ne cessera pas de subsister si l'on vient à rendre le système invariable; donc les conditions nécessaires et suffisantes à l'équilibre des forces agissant sur des systèmes invariables ne cessent pas d'être *nécessaires* lorsque ces mêmes forces viennent à agir sur des systèmes ne remplissant plus cette condition.

Digitized by Google

par les chiffres *gras* **1**, **2**, **3**, **4**, **5**,..., et les côtés correspondants du polygone des forces par les chiffres similaires 1, 2, 3, 4, 5,....

Ainsi, dans la *fig.* 2 (*Pl. I*), on peut regarder les lignes munies de flèches et portant les numéros **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, comme les lignes d'action de sept forces, et les sept côtés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 du polygone de ces lignes (*fig.* 2), comme les côtés du polygone de ces forces, c'est-à-dire comme donnant les grandeurs et sens de ces forces, tandis que les lignes **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** en donnent la position.

Remarque. — Dans les deux figures formées l'une par les lignes d'action des forces, l'autre par le polygone des forces, rien n'indique le point d'application des forces. La connaissance des points d'application est, en effet, inutile dans le premier des deux problèmes dont s'occupe la Statique graphique (§ 38) : celui relatif à l'équilibre et à la composition des forces appliquées à un système invariable. On sait qu'on peut, sans modifier l'état de repos ou de mouvement d'un tel système, déplacer les points d'application des forces qui agissent sur lui, le long de leurs lignes d'action respectives; mais ces déplacements, qui supposent, bien entendu, que les points choisis pour points d'aplication sont liés au système, modifient les actions qui s'exercent *à l'intérieur* de celui-ci. Aussi, quand nous nous occuperons de l'étude de ces actions intérieures, c'est-à-dire quand nous arriverons au second des problèmes qui font l'objet de la Statique graphique, nous devrons nous donner, sur chaque ligne d'action, le point d'application de la force dirigée suivant cette ligne.

§ 40.

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME OU DU TRIANGLE DES FORCES. — Nous emprunterons à la Statique ordinaire la règle dite *du parallélogramme des forces,* ou, si l'on veut, *du triangle des forces.* Elle peut être énoncée ainsi :

La résultante de deux forces dont les lignes d'action se rencontrent : 1° passe par leur point d'intersection; 2° est égale en grandeur, direction et sens à la somme des deux forces, le mot *somme* ayant la signification que nous lui avons attribuée au § 3. Soient (*fig.* 23, *Pl. VI*) **1** et **2** les lignes d'action de deux forces; ces lignes se rencontrent en O. Soient (*fig.* 23) 1 et 2 les côtés du

polygone de ces deux forces. Leur résultante est égale en grandeur, direction et sens à la ligne *ab*, qui va de l'origine à l'extrémité du polygone des deux forces; elle est donc (§ 3) égale en grandeur et direction, et *opposée* en sens à la ligne qui ferme ce contour, ou égale en grandeur, direction et sens à la somme des deux forces. La ligne d'action de cette résultante est OX parallèle à *ab* menée du point O.

Corollaire I. — *Inversement, l'une quelconque des composantes est égale en grandeur, direction et sens à la* différence (§ 8) *entre la résultante et l'autre composante.*

Ainsi, *décomposer une force en deux dont l'une est donnée, c'est retrancher la seconde de la première.*

Corollaire II. — *Pour qu'un système de trois forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que le polygone de ces forces* (lequel se réduit ici à un triangle) *soit fermé.*

Car si ces trois forces sont en équilibre, chacune d'elles est égale et *opposée* à la résultante des deux autres, ce qui exige, d'après la règle du triangle des forces, que l'une quelconque d'entre elles soit égale en grandeur, direction et *sens* à la ligne qui ferme le polygone des deux autres.

§ 41.

Étant donné un système de i forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan (ou même dans l'espace), si deux de ces forces se rencontrent, on peut réduire le système donné à un système équivalent (*) ne contenant plus que $i-1$ forces. Il suffit pour cela de remplacer les deux forces qui se rencontrent par leur résultante.

Si, dans ce nouveau système, deux forces se rencontrent encore, on pourra le réduire à un système équivalent de $i-2$ forces, et ainsi de suite; en sorte que si, dans les systèmes successifs qu'on forme ainsi, il y a toujours deux forces qui se rencontrent, on finira par réduire le système à une force unique qui en sera la résultante.

(*) On sait que deux systèmes de forces sont dits *équivalents* lorsqu'ils peuvent être substitués l'un à l'autre sur un corps solide invariable, sans que l'état de repos ou de mouvement de ce corps en soit affecté.

S'il existe une force unique équivalente à un système de forces données, elle en est la résultante.

§ 42.

COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES. — Cette circonstance se présentera toujours si les forces données sont concourantes. La résultante des deux premières 1 et 2 (*fig.* 21, *Pl. VI*) est égale en grandeur, direction et sens, à la ligne qui sous-tend l'angle formé par les côtés 1 et 2 du polygone des forces (*fig.* 21) et passe par le point de concours O des forces données. La résultante de celle-ci et de la force 3 est égale en grandeur, direction et sens à la ligne qui sous-tend le contour formé par les trois côtés 1, 2, 3 du polygone des forces, et passe également par le point O, et ainsi de suite. Donc :

La résultante d'un système de forces concourantes : 1° passe par le point de concours de ces forces ; 2° est égale à leur somme, c'est-à-dire à la ligne qui va de l'origine à l'extrémité du polygone des forces.

§ 43.

Lorsque les forces que l'on considère, sans être concourantes, sont toutes situées dans un même plan, les conditions indiquées au § 41, pour qu'elles admettent une résultante unique, se présentent en général.

Supposons qu'elles se présentent, et soient

$$\text{(A)} \qquad P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots,\ P_{i-1},\ P_i$$

les i forces données. Supposons que P_1 et P_2 se rencontrent, c'est-à-dire ne soient pas parallèles ; on pourra trouver, par la règle du triangle des forces, leur résultante que nous appellerons P_{12}. Supposons que P_{12} rencontre P_3, on pourra trouver leur résultante que nous appellerons P_{123} ; que P_{123} rencontre P_4, que P_{1234} soit la résultante de ces deux forces : en poursuivant ainsi, pourvu que chacune des nouvelles forces trouvées rencontre toujours une des forces données, on pourra former la série des forces

$$P_{12},\ P_{123},\ P_{1234}, \ldots,\ P_{1234\ldots i},$$

dont la dernière est la résultante des forces données ; l'avant-dernière $P_{1234\ldots}$, $(i-1)$ est la résultante des $i-1$ premières de ce système, et ainsi de suite.

Ces résultantes successives s'obtiennent sans difficulté, si les forces données sont représentées par leurs lignes d'action et leur polygone de forces (*fig.* 22 et 22, *Pl. VI*). D'abord, en grandeur et sens, elles sont représentées par les diverses diagonales du polygone des forces, issues de l'origine *a* de ce polygone; et la résultante finale de toutes les forces données sera par conséquent égale en grandeur et sens à la ligne qui va de l'origine à l'extrémité de ce polygone, c'est-à-dire qu'*elle sera égale à la somme des forces données* (§ 3), tout comme si ces forces étaient concourantes. Maintenant, pour avoir la ligne d'action (1 2) de la force P_{12}, il suffit, par le point d'intersection des lignes d'action 1 et 2, de mener une parallèle à la diagonale (1 2) du polygone des forces.

Pour avoir, de même, la ligne d'action de la force P_{123}, comme cette force est la résultante de P_{12} et de P_3, il suffit de prolonger la ligne d'action (1 2) jusqu'à celle 3 et, par le point d'intersection, de mener une parallèle à la diagonale (1 2 3). En poursuivant, on voit qu'on est amené à la règle suivante :

Pour composer un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan, *sauf les restrictions indiquées plus haut relativement au non-parallélisme de certaines de ces forces,* construisez un polygone ayant son point de départ à l'intersection des lignes d'action de deux des forces données, ses sommets successifs sur les autres forces données, et ses côtés parallèles aux diagonales issues de l'origine du polygone des forces. Le dernier côté du polygone ainsi tracé est la ligne d'action de la résultante cherchée. Cette résultante est d'ailleurs égale en grandeur, direction et sens à la somme des forces données; elle est donc entièrement connue.

§ 44.

SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME DE LA COMPOSITION GRAPHIQUE D'UN SYSTÈME DE FORCES DISTRIBUÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS UN PLAN, DÉDUITE DES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES POLYGONES FUNICULAIRES. — Observons maintenant que le polygone ayant pour côtés les lignes d'action (1 2), (1 2 3), (1 2 3 4),.... des résultantes successives n'est autre chose qu'un polygone funiculaire particulier du système des forces données, à savoir : le polygone funiculaire ayant pour pôle l'origine *a* du polygone des forces et dont

les côtés successifs (1 2), (1 2 3), (1 2 3 4),... représentent aussi (§ 21, *Rem. II*) les *résultantes géométriques* des lignes 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4,....

La ligne d'action de la résultante d'un système des forces coïncide donc avec la *résultante géométrique*, telle que nous l'avons définie au § 21, des lignes représentatives de ces forces.

Mais, du moment où il en est ainsi, nous pouvons faire appel à toutes les propriétés géométriques précédemment établies des polygones funiculaires. Notamment, pour trouver un point de la ligne d'action de la résultante et, par suite, cette ligne tout entière, puisqu'elle est parallèle à la droite qui ferme le polygone des forces, il n'est nullement nécessaire de faire usage du polygone funiculaire relatif au pôle particulier *a* : tout autre polygone funiculaire nous conduira tout aussi bien au but. Le point d'intersection des deux côtés extrêmes d'un tel polygone sera un point de la résultante cherchée. C'est ainsi que, sur les figures 22 et 22 (*Pl. VII*), le polygone A 1 2 3 4 5 6 7 8 relatif au pôle O nous fournit, par l'intersection de ses côtés extrêmes, un point 8, qui se trouve nécessairement appartenir à la résultante.

La faculté que nous acquérons ainsi de déterminer la résultante, par l'emploi des polygones funiculaires, outre les avantages évidents qu'elle offre au point de vue de l'exécution matérielle, constitue un résultat scientifique remarquable; car, tandis que la règle énoncée à la fin du paragraphe précédent devient illusoire quand certaines des forces que l'on considère deviennent parallèles, celle que fournit l'emploi d'un polygone funiculaire quelconque est toujours applicable; et comme elle donne la résultante, quelque éloignés que soient les points de rencontre des forces qu'au § 43 nous avons supposées se couper, elle la donnera encore quand certains de ces points ou tous auront passé à l'infini, c'est-à-dire quand certaines forces, ou toutes les forces que nous avons supposées se rencontrer, deviendront parallèles.

Ainsi la méthode nouvelle à laquelle nous arrivons ne comporte plus aucune des restrictions que nous avons faites au début. Elle s'applique indifféremment à tout système de forces *parallèles* ou *non*, situées dans un plan, et nous pouvons énoncer la règle tout à fait générale que voici :

Pour composer un système de forces distribuées d'une manière

Digitized by Google

quelconque dans un plan et représentées par leurs lignes d'action et leur polygone des forces, construisez un quelconque des polygones funiculaires du système; le point d'intersection des côtés extrêmes de ce polygone donnera un point de la ligne d'action de la résultante. Cette ligne d'action est d'ailleurs parallèle à la droite représentant la somme des forces données, et la résultante elle-même est égale en grandeur, direction et sens, à cette même somme.

§ 45.

MÊME SOLUTION OBTENUE PAR DES CONSIDÉRATIONS PUREMENT MÉCANIQUES. — Essayons d'arriver maintenant à cette règle par des considérations purement mécaniques. Cette nouvelle marche, en nous fournissant la définition mécanique des polygones funiculaires que nous n'avons considérés jusqu'ici qu'au point de vue géométrique, achèvera d'en faire comprendre le rôle et l'importance.

Soient données (*fig.* 24, *Pl. VII*) les forces représentées par les lignes d'action 11′, 22′, 33′, 44′, 55′, et par les côtés 1, 2, 3, 4, 5 du polygone des forces (*fig.* 24).

Proposons-nous de trouver directement la résultante de ces forces, quel qu'en soit le nombre et quelle que soit la manière dont elles sont distribuées dans le plan.

Pour cela, décomposons la force 11′ en deux autres, dont l'une 1A soit donnée arbitrairement en grandeur, direction et sens. Pour avoir l'autre, par l'origine *a* du polygone des forces, menons la ligne *a*O égale en grandeur, direction et sens, à 1A. Comme cette dernière ligne est arbitraire, on voit que le point O est un point absolument quelconque du plan. La seconde composante sera représentée sur le polygone des forces, en grandeur, direction et sens, par la ligne O1 2 ayant son origine en O et son extrémité au sommet 1 2; sa ligne d'action sera une parallèle à O1 2 menée par 1. Soit 2 le point de rencontre de cette parallèle avec la force 22′.

Décomposons cette dernière en deux autres : l'une dirigée suivant 21, *égale et contraire* à la composante de la force 11′ dirigée suivant cette même ligne, c'est-à-dire égale et contraire à O1 2. La seconde composante sera représentée en grandeur, direction et sens, par la ligne O23 ayant son origine en O et son extrémité au sommet 23 du polygone des lignes; sa ligne d'action sera une parallèle à O23 issue de 2. Soit 3 le point d'intersection de cette pa-

rallèle avec la force 33′. Décomposons de même cette force en deux, dont l'une dirigée suivant 32 soit *égale et contraire* à la composante de 22′ dirigée suivant cette ligne, c'est-à-dire égale et contraire à O23; la seconde composante sera en grandeur, direction et sens, représentée par O34, et ainsi de suite. En poursuivant, on voit : 1° qu'on est amené à tracer sur la figure 24 tous les rayons issus de O, et sur la figure 24 un polygone dont les côtés sont parallèles à ces rayons et dont les sommets sont sur les lignes d'action des forces données, en un mot, le polygone funiculaire relatif au pôle O; et, comme ce point est quelconque, c'est donc un polygone funiculaire quelconque qu'on a ainsi tracé; 2° que le système des forces données est maintenant remplacé par un système équivalent dont toutes les forces sans exception sont dirigées suivant les côtés du polygone funiculaire; 3° que, suivant chacun des côtés intermédiaires de ce polygone, sont dirigées deux forces égales et contraires qui, par conséquent, se détruisent, en sorte qu'il ne reste en tout que deux forces : l'une dirigée suivant l'un des côtés extrêmes, l'autre suivant l'autre côté extrême du polygone funiculaire. Ces deux forces forment donc à elles seules un système équivalent aux forces données, et il suffit de les composer d'après la règle du triangle des forces pour avoir la résultante de ces dernières. Or cette composition se trouve tout indiquée : les deux forces à composer sont représentées sur la figure 24 par les rayons extrêmes *a*O (dirigée de *a* vers O) et O*b* (dirigée de O vers *b*). Donc leur résultante sera égale en grandeur, direction et sens, à la *ligne qui va de l'origine à l'extrémité du polygone des forces données*, c'est-à-dire à leur somme. Quant à la ligne d'action de la résultante, elle passe par l'intersection des lignes d'action de ses deux composantes, c'est-à-dire par le point d'intersection 6 des deux côtés extrêmes du polygone funiculaire; elle est, d'ailleurs, parallèle à la ligne *ab*. Nous arrivons donc ainsi par une voie nouvelle à la règle énoncée au paragraphe précédent.

§ 46.

LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES POLYGONES FUNICULAIRES DÉDUITES DE CONSIDÉRATIONS MÉCANIQUES. — Cette nouvelle marche conduit à des conséquences intéressantes.

Digitized by Google

D'abord elle nous fait apercevoir avec une entière évidence tous les théorèmes de Géométrie établis au Chapitre II. En effet, puisque, quelle que soit la position du pôle O d'un polygone funiculaire, ses côtés extrêmes se coupent en un point 6 placé sur la ligne d'action de la résultante des forces données, on voit que, si le pôle se déplace, le point d'intersection de ces côtés extrêmes décrit une ligne droite dont la position est indépendante de celle du pôle. Cette droite est parallèle à celle qui ferme le polygone des forces; et ceci est vrai pour deux côtés quelconques d'un polygone funiculaire, aussi bien que pour les deux côtés extrêmes, puisque deux côtés quelconques se coupent en un point de la résultante de celles des forces données qui sont comprises entre ces côtés. Ainsi le point d'intersection de deux côtés quelconques d'un polygone funiculaire décrit une ligne droite indépendante de la position du pôle de ce polygone; c'est le théorème du § 21 dont tous les suivants, établis au Chapitre II, sont des corollaires. Ils résultent tous de cet axiome de Statique, que la résultante d'un système de forces est indépendante de l'ordre dans lequel on les compose et qu'elle ne change pas, si on remplace certaines de ces forces par leurs résultantes partielles.

On peut aussi démontrer mécaniquement le théorème fondamental établi au § 20, à savoir : *Lorsque le pôle d'un polygone funiculaire se déplace en ligne droite, les côtés de ce polygone ne font que pivoter autour de points fixes, tous placés sur une ligne droite parallèle à celle que décrit le pôle.*

Considérons, en effet, deux polygones funiculaires, l'un relatif au pôle O, l'autre relatif au pôle O′ d'un système de forces P_1, P_2, P_3, P_4, ..., P_n.

Soient (*fig.* 17, *Pl. IV*) A1 et 67 le premier et le $i^{ième}$ côté du polygone funiculaire relatif au pôle O (*fig.* 17); soient A′1′ et 6′7′ les côtés analogues du polygone relatif au pôle O′. Il s'agit de montrer que la ligne joignant le point d'intersection de A1 et de A′1′ au point d'intersection de 67 et de 6′7′ est parallèle à OO′.

Pour cela, observons que les i premières des forces données, à savoir P_1, P_2, P_3,..., P_i, peuvent (§ 45) être remplacées par deux forces dirigées, l'une suivant A1, l'autre suivant 67.

Soient R_0 et R_i ces deux forces, dont les grandeurs sont représentées sur le polygone des forces par deux rayons issus de O et

Digitized by Google

allant l'un à l'origine de ce polygone, l'autre au sommet $ii+1$ (ici 67). Appelons Oa et Ox' ces deux rayons.

Mais les forces données peuvent de même être remplacées par deux forces dirigées l'une suivant A'1', l'autre suivant 6'7'. Soient R'_0 et R'_i ces deux forces dont les grandeurs sont représentées sur le polygone des forces par les deux rayons $O'a$ et $O'x'$.

Donc les deux forces

$$R_0 \quad \text{et} \quad R_i$$

sont équivalentes aux deux forces

$$R'_0 \quad \text{et} \quad R'_i$$

ou, si l'on veut, les quatre forces

$$R_0, \quad R_i; \quad -R'_0, \quad -R'_i,$$

dont les deux dernières sont égales et opposées à R'_0 et R'_i, forment un système en équilibre, ce qui exige que la résultante de R_0 et de $-R'_0$ soit égale et opposée à celle de R_i et de $-R'_i$; mais la première de ces deux résultantes passe par le point d'intersection de A1 et de A'1'; la seconde, par le point d'intersection de 67 et 6'7'. Donc la ligne qui joint ces deux points d'intersection peut être regardée comme la ligne d'action commune à la résultante de R_0, $-R'_0$ et à celle de R_i, $-R'_i$. Et comme ces résultantes sont l'une et l'autre représentées sur le polygone des forces par la ligne OO' (puisque l'une est la différence (*) des deux rayons Oa et $O'a$; l'autre, celle de deux rayons Ox' et $O'x'$), leur ligne d'action commune est parallèle à OO', ce qui établit le théorème énoncé.

§ 47.

CONDITION GRAPHIQUE POUR QU'UN SYSTÈME DE FORCES SITUÉES DANS UN PLAN ADMETTE UNE RÉSULTANTE. — Discutons maintenant la règle trouvée au § 44 pour la composition des forces situées dans un plan.

Il y a trois cas à considérer, suivant que les côtés extrêmes du polygone funiculaire se coupent, sont coïncidants ou parallèles.

(*) Le mot *différence* est toujours employé dans le sens défini au § 8, Chapitre I.

Théorème. — *Pour qu'un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan admette une résultante, il faut et il suffit que le polygone de ces forces ne soit pas fermé.*

En effet, pour que les forces données admettent une résultante, il faut et il suffit que le point d'intersection 6 (*fig.* 24, *Pl. VII*) des deux côtés extrêmes du polygone funiculaire soit un point déterminé et placé à distance finie, c'est-à-dire que ces deux côtés ne soient ni parallèles ni coïncidants. Il faut et il suffit pour cela que les rayons extrêmes O*a* et O*b* issus du pôle O (*fig.* 24) ne coïncident pas, c'est-à-dire que le polygone des forces ne soit pas fermé.

§ 48.

CONDITIONS GRAPHIQUES D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE FORCES SITUÉES DANS UN PLAN. — Supposons maintenant le polygone des forces fermé : c'est le cas où les points extrêmes *a* et *b* de ce polygone se rapprochent jusqu'à venir se confondre (*fig.* 24) ; alors la résultante sera nulle, puisqu'elle est égale en grandeur à la droite *ab* ; de plus, les deux rayons extrêmes O*a* et O*b* du polygone des forces coïncidant, les côtés extrêmes d'un polygone funiculaire quelconque seront ou parallèles ou coïncidants.

S'ils sont parallèles, le point d'application de la résultante passe à l'infini. On arrive donc à cette solution illusoire : une résultante nulle ayant son point d'application à l'infini, ce qui indique une impossibilité. S'ils sont coïncidants, le point d'application est indéterminé.

Pour interpréter nettement ces résultats, laissons pour un instant de côté l'une quelconque des forces données. Le polygone des autres forces n'étant pas fermé, elles admettent (§ 47) une résultante égale en grandeur et direction, opposée en sens à la droite qui ferme ce polygone, c'est-à-dire égale en grandeur et direction, opposée en sens à la force laissée de côté. Si les côtés extrêmes du polygone funiculaire coïncident, c'est-à-dire si ce polygone se ferme, cette dernière force et la résultante des autres coïncideront ; le système proposé sera donc en équilibre, puisque l'une de ses forces sera égale et opposée à la résultante des autres ; et alors tous les polygones funiculaires se fermeront de même, car le système des forces proposées peut (§ 45)

être remplacé par deux forces dirigées suivant les côtés extrêmes d'un quelconque de ses polygones funiculaires; et ces deux forces ne pourront se faire équilibre que si elles sont égales et directement opposées.

Ainsi :

Théorème. — *Pour qu'un système de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que son polygone des forces, ainsi que l'un de ses polygones funiculaires, se ferme, et alors tous ses polygones funiculaires se fermeront.*

Ce théorème est équivalent au théorème de Géométrie établi au § 25. Il indique que trois conditions sont nécessaires pour l'équilibre d'un système de forces situées dans un plan; en effet, la nécessité que le polygone des forces dont les côtés sont donnés en grandeur et en direction se ferme vaut deux conditions; la nécessité qu'un polygone funiculaire se ferme ne vaut qu'une condition, puisque les côtés d'un tel polygone ne sont donnés qu'en direction. On a donc en tout trois conditions à remplir pour l'équilibre.

§ 49.

CONDITIONS GRAPHIQUES POUR QU'UN SYSTÈME DE FORCES SITUÉES DANS UN PLAN SE RÉDUISE A UN COUPLE. — Si, le polygone des forces étant fermé, un seul polygone funiculaire ne se ferme pas, aucun ne se fermera, parce que, si un seul se fermait, tous, d'après le théorème ci-dessus, jouiraient de la même propriété; les côtés extrêmes de tous les polygones funiculaires sont alors parallèles : le système des forces données se réduira donc à deux forces dirigées suivant ces lignes parallèles; ces deux forces seront d'ailleurs égales et de sens opposés, puisque le polygone des forces est fermé.

Ainsi, dans le cas où la règle générale du § 44 fournit cette solution illusoire, une résultante nulle ayant son point d'application à l'infini, les forces proposées n'admettent pas de résultante unique et se réduisent à deux forces parallèles, égales et de sens contraires. Un système de deux pareilles forces se nomme un *couple*.

On peut démontrer directement qu'un couple ne peut pas se réduire à une force unique. En effet, si une force R fait équilibre à

Digitized by Google

un couple formé des forces P et — P (*), on pourra, à cause de la symétrie existant entre les deux forces du couple, trouver une autre force — R égale, parallèle et de sens opposé à R, occupant, par rapport au couple, une situation symétrique de celle de R et susceptible de le tenir également en équilibre. Soit R′ une force égale et directement opposée à — R, en sorte que R′ soit de même sens que R. On peut, sans troubler l'équilibre des trois forces P, — P, R, leur adjoindre les forces égales et opposées — R et R′, en sorte qu'il y a équilibre entre les cinq forces

$$P, -P, R, -R \text{ et } R';$$

mais il y a aussi équilibre entre les trois forces

$$P, -P \text{ et } -R.$$

Donc les forces R et R′ devraient se détruire, ce qui est impossible, puisqu'elles sont dirigées dans le même sens.

Ainsi, dans ce cas, les forces données n'admettent pas une résultante unique; mais il est aisé de voir qu'elles peuvent être réduites à un couple d'une infinité de manières. On peut se donner arbitrairement en grandeur, position et sens, l'une des forces du couple auquel on les réduit : il suffit pour cela de remplacer une des forces données par deux autres, dont l'une X soit donnée arbitrairement; puis laisser de côté cette force X et chercher la résultante des autres. Cette résultante sera égale et parallèle à X, de sens contraire, et formera avec elle un couple équivalent aux forces données.

Ainsi :

Théorème. — *Pour qu'un système de forces se réduise à un couple, il faut et il suffit que, son polygone des forces étant fermé, un de ses polygones funiculaires ne se ferme pas; alors aucun de ses polygones funiculaires ne se fermera, et le système des forces données n'admettra pas de résultante, mais pourra d'une infinité de manières être réduit à un couple.*

Nous verrons plus loin ce que ces divers couples ont de commun; ici il nous importait seulement de montrer que le polygone des forces et le polygone funiculaire conduisent, aussi bien que les procédés de la Statique ordinaire, à la considération des couples.

(*) En appelant — P la seconde force du couple égale à P et de sens opposé.

Digitized by Google

§ 50.

CAS PARTICULIER DES FORCES PARALLÈLES. — Tout ce qui a été dit sur la composition et l'équilibre des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan s'applique sans restriction au cas particulier où ces forces sont parallèles.

Le polygone des forces se réduit alors à une simple ligne.

La *fig.* 31 (*Pl. VIII*) contient les lignes d'action de quatre forces parallèles 1, 2, 3, 4, dont 1, 2, 3, 4 (*fig.* 31) sont les grandeurs portées bout à bout à partir du point *a*. La grandeur de leur résultante est *ab*, et pour avoir sa ligne d'action il suffit de construire un polygone funiculaire.

Le point 5 de rencontre des côtés extrêmes de ce polygone détermine la position de cette ligne.

Si l'on se donnait les cinq forces

1, 2, 3, 4, 5,

ayant pour grandeurs

1, 2, 3, 4, 5,

on voit que le polygone des lignes serait fermé, c'est-à-dire que la résultante des cinq lignes données serait zéro; le polygone funiculaire serait également fermé, ce qui montre que les cinq forces données sont en équilibre, comme cela doit être, puisque la cinquième force a été prise égale et opposée à la résultante des quatre autres.

§ 51.

DÉCOMPOSITION GRAPHIQUE D'UNE FORCE EN DEUX AUTRES QUI LUI SONT PARALLÈLES. — De même qu'on peut décomposer, par la règle du triangle des forces, une force donnée en deux autres qui concourent sur sa direction en se donnant l'une des composantes en grandeur et position, ou les deux en position, de même on peut décomposer une force en deux autres qui lui sont parallèles en se donnant l'une d'elles en grandeur et position, ou les deux en position.

1° Soit (*fig.* 25, *Pl. VII*) à décomposer la force donnée R ou 1 en deux autres, suivant les lignes Q et P ou 2 et 3.

Nous construisons AC égal et parallèle à la force donnée R ou 1; appelons 2 et 3 les grandeurs des forces inconnues dont les lignes d'action 2 et 3 sont connues; joignons les extrémités de AC à un point O; puis, d'un point *a* pris sur P ou 3, nous menons *a* I ou 3 1 parallèle au rayon AO ou 3 1 jusqu'à sa rencontre en I avec la force donnée R; puis I *b* ou 1 2 parallèle au rayon OC ou 1 2 jusqu'à sa rencontre en *b* avec Q; menons enfin OB ou 2 3 parallèle à *ab* ou 2 3. Les deux forces cherchées sont AB = P = 3 et BC = Q = 2. Elles sont de même sens.

Si la force R était placée en R′ d'un même côté des lignes P et Q, en supposant AC′ = 1′ égal à la force donnée R′, le triangle *ab* I serait remplacé par *ab* I′, le point B serait au-dessous de C′ et la force BC′ ou 2 serait dirigée en sens contraire de la force donnée AC′ = 1′ et de la composante AB = 2.

2° Si l'une des forces, celle P par exemple, est donnée en grandeur, alors, sur la *fig.* 25 ou 26, on connait les trois points A, B, C du polygone des forces et, par suite, les trois rayons OA, OB, OC. On pourra donc construire le triangle *ba* I et avoir un point *b* de la seconde composante Q. La grandeur de cette force est d'ailleurs fournie directement sur le polygone des forces comme différence ou somme des forces données.

CHAPITRE V.

ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES PLANS NON LIBRES. RECHERCHE GRAPHIQUE DES RÉACTIONS DES APPUIS.

§ 52.

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME ASSUJETTI A TOURNER AUTOUR D'UN POINT FIXE. — PRESSION SUR LE POINT FIXE. — Un point fixe est un point tel qu'une force quelconque passant par ce point ne saurait le mettre en mouvement. Ce n'est pas que la fixité constitue par elle-même une force : un point fixe sur lequel on n'exercerait aucun effort serait exactement dans le même état que s'il était libre; mais, dès qu'on vient à y ap-

pliquer une force F ou des forces ayant F pour résultante, la fixité du point fait naître une force F′ *exactement* égale et contraire à F, en sorte que le point est dans le même état que si, libre, il était soumis à ces deux forces égales et contraires.

On voit par là qu'on peut toujours traiter un point fixe comme s'il était libre, à la condition d'adjoindre aux forces, quelles qu'elles soient, qui agissent sur lui une force fictive capable de les maintenir en équilibre.

La résultante F des forces agissant réellement sur un point fixe se nomme la *pression* exercée sur ce point; la force F′ égale et contraire à F est la *résistance* ou la *réaction* du point. Si cette résistance est indéfinie, le point demeurera fixe quelle que soit la résultante F des forces qu'on y applique, c'est-à-dire quelle que soit la pression qu'on exerce sur lui. Si, au contraire, il n'a qu'une résistance limitée, il faut faire en sorte de ne pas faire naître des pressions dépassant cette limite; et, comme tous les points fixes de la nature sont dans ce cas, on voit qu'il importe toujours de connaître exactement les pressions qu'on exerce sur eux, afin de leur donner une résistance au moins égale à la plus grande des pressions qu'ils auront à supporter.

Maintenant, supposons un corps ou système invariable mobile autour d'un point fixe et soumis à des forces distribuées dans un plan contenant ce point. Pour que le corps soit en équilibre, il n'est plus nécessaire ici que les forces qui agissent sur lui satisfassent aux conditions d'équilibre du § 49: il suffit évidemment que leur résultante passe par le point fixe. On vérifiera aisément si cette condition est remplie; il suffira pour cela de tracer un polygone funiculaire relatif à un pôle quelconque, en faisant passer le premier côté de ce polygone par le point fixe : le dernier côté devra y passer aussi, puisque ce point appartient à la résultante. Ainsi :

Pour qu'un système invariable, mobile autour d'un point fixe et soumis à des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan, soit en équilibre, il faut et il suffit qu'un polygone funiculaire quelconque passant par ce point soit fermé.

Si cette condition est remplie, la pression sur le point fixe est égale à la résultante des forces données, résultante que le polygone des forces fournit immédiatement.

§ 53.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS S'APPUYANT PAR UN POINT UNIQUE SUR UNE LIGNE INÉBRANLABLE. PRESSION SUR CETTE LIGNE. — Considérons maintenant (*fig.* 27, *Pl. VII*) un corps ou système invariable appuyé sur une ligne fixe xy par un point A. Si ce corps n'était soumis à aucune force il serait exactement dans le même état que si la ligne fixe n'existait pas; mais s'il est soumis à des forces dont la résultante F satisfasse aux trois conditions : 1° de passer par le point A; 2° d'être normale en ce point à la ligne xy; 3° d'être dirigée dans un sens tel, qu'elle tende à appuyer le corps sur cette ligne et non à l'en détacher, alors il est clair que la présence de la ligne inébranlable xy fera naître une force F′ égale et contraire à F, et que le corps sera en équilibre, tout comme si, libre, il était soumis aux deux forces F et F′.

Ainsi : *un corps qui s'appuie par un point* A *sur une ligne fixe peut être rendu libre, pourvu qu'aux forces qui agissent sur lui on adjoigne une force fictive de grandeur convenable, normale à la ligne au point* A.

La force F est la pression que le corps exerce sur la ligne; la force F′ la réaction de celle-ci sur le corps.

Il n'est pas nécessaire que la ligne xy présente une résistance indéfinie, il suffit qu'elle présente une résistance égale ou supérieure à la pression F.

Au point de vue graphique, pour qu'un corps s'appuyant sur une ligne donnée xy en un point donné A soit en équilibre, il faut et il suffit : 1° *que la résultante des forces qui agissent sur lui soit parallèle à la normale à* xy *au point* A, *ce que l'on vérifie immédiatement sur le polygone des forces;* 2° *qu'elle ait un sens tel, qu'elle tende à appuyer le corps sur la ligne fixe, ce que l'on vérifie de même sur le polygone des forces;* 3° *il faut ensuite que la résultante passe au point* A, *c'est-à-dire qu'un polygone funiculaire quelconque passant par ce point se ferme.* (Cette dernière condition est la même que celle trouvée au paragraphe précédent.)

Digitized by Google

§ 54.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS REPOSANT PAR DEUX DE SES POINTS SUR DES LIGNES PLANES FIXES. — PRESSIONS SUR CES LIGNES. — Soit un corps reposant par deux de ses points A et B sur deux lignes fixes, on pourra (§ 53) le supposer libre, pourvu qu'aux forces qui agissent réellement sur lui on adjoigne deux forces fictives dirigées suivant les normales AN et BN′ à ces lignes (*fig.* 30, *Pl. VIII*).

Donc, pour que le corps puisse être en équilibre, il faut et il suffit que la résultante R des forces qui agissent sur lui soit équilibrée par les forces dirigées suivant les normales AN et BN′. Pour cela, il faut et il suffit que cette résultante passe par le point d'intersection O de ces normales. *Tout se passe donc comme si le corps était assujetti à tourner autour du point* O *considéré comme fixe, et le problème est le même que celui traité au* § 52.

Les pressions sur les courbes sont les composantes de R suivant OA et OB, composantes que fournit immédiatement le polygone des forces.

Il y a toutefois à satisfaire à deux conditions de plus que si le point O était réellement fixe. Il faut que les composantes de R, suivant AN et BN′, tendent à appuyer le corps sur les courbes fixes et non à les en éloigner.

Remarque. — La condition principale pour qu'un corps reposant par deux de ses points sur des lignes fixes, consistant en ce que la résultante des forces appliquées au corps passe par le point d'intersection des normales aux lignes fixes, est remplie d'elle-même :

1° Toutes les fois que les forces agissant sur le système sont symétriquement réparties par rapport à une ligne XX′, et que les normales AN et BN′ sont aussi symétriques par rapport à cette ligne ;

2° Toutes les fois que les forces agissant sur le système sont des charges verticales et que les lignes normales AN et BN′ sont aussi verticales.

Ces deux cas sont ceux qui se présentent le plus habituellement dans les applications.

§ 55.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS AYANT UN POINT FIXE ET S'APPUYANT PAR UN AUTRE POINT SUR UNE LIGNE FIXE. RÉACTION DES APPUIS. — Lorsqu'un corps a un point fixe C (*fig.* 35, *Pl. IX*), et qu'en outre il s'appuie par un autre point A sur une ligne fixe xy, il est généralement en équilibre, quelles que soient les forces qui agissent sur lui. Si en effet R est la résultante de ces forces, on pourra toujours décomposer R en deux autres forces : l'une dirigée suivant la normale NA à la ligne fixe en A, l'autre passant par le point C. L'équilibre aura lieu pourvu que la composante suivant NA appuie le corps sur la courbe. Cette composante donnera alors la pression sur la courbe, et celle suivant C donnera la pression sur le point fixe. Si le système des forces données se réduisait à un couple, on pourrait toujours décomposer chacune des deux forces de ce couple en deux autres, l'une suivant la normale IA à xy et l'autre passant en C; puis composer entre elles les deux forces suivant IA en une seule dirigée suivant cette ligne, et les deux forces concourant en C en une seule issue de ce point.

Ainsi, dans tous les cas, on arrive à substituer aux forces données deux forces, l'une normale à xy en A, l'autre passant au point C. Cette dernière est détruite par la fixité du point; la première est détruite par la résistance de la ligne xy, si elle tend à presser le corps sur cette ligne.

Maintenant, comment déterminer graphiquement les pressions sur les appuis, lorsque les forces agissant sur le corps sont données par leurs lignes d'action et leur polygone des forces?

On rendra le système libre en adjoignant aux forces données : 1° une force fictive normale à xy en A; 2° une force fictive passant en C.

La ligne d'action de la première de ces forces est connue, et de la seconde on connait un point.

Soient (*fig.* 32, *Pl. VIII*) 1, 2, 3, 4 les lignes d'action des forces appliquées au système, ces forces étant représentées par les côtés 1, 2, 3, 4 du polygone des forces (*fig.* 32). Soit AN la normale à xy. Ce sera la ligne d'action de la réaction de cette ligne : nous l'appellerons 5, et par l'extrémité b du polygone des forces

nous mènerons *bn* parallèle à AN et nous appellerons cette ligne 5.

Maintenant construisons le polygone funiculaire relatif à un pôle quelconque O en partant du point fixe C. Le corps étant libre, pour qu'il soit en équilibre, il faut et il suffit que le polygone funiculaire dont il s'agit se ferme, ainsi que le polygone des forces. On peut tracer les côtés

C1, 12, 23, 34 et 45

du polygone funiculaire respectivement parallèles aux rayons :

Oa, $O12$, $O23$, $O34$, $O45$,

Le dernier côté du polygone funiculaire sera C5, que nous appellerons 6. Ce sera la ligne d'action de la réaction exercée par le point fixe C; et si, de l'origine *a* du polygone des forces, nous menons une parallèle à cette ligne jusqu'à sa rencontre en *z* avec *bn*, la grandeur de la réaction de *xy* sera *bz;* la grandeur de la réaction du point fixe sera *az*.

Ainsi la règle à suivre est celle-ci :

Soient AN *la normale à la ligne fixe au point de contact et* C *le point fixe du corps. Tracez un polygone funiculaire quelconque des forces données, en partant de* C; *prolongez le dernier côté de ce polygone jusqu'à sa rencontre avec* AN *en* 5; *joignez le point de rencontre* 5 *au point* C; *par l'origine du polygone des forces menez une parallèle à la ligne ainsi obtenue* C5, *et par l'extrémité de ce même polygone menez une parallèle à la normale* AN. *Vous aurez ainsi complété le polygone des forces et obtenu les pressions cherchées sur le point fixe et sur la courbe fixe.*

§ 56.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS REPOSANT PAR TROIS POINTS SUR DES LIGNES FIXES. — Considérons maintenant un corps reposant par trois de ses points sur des lignes fixes. Soient AN, BN′, CN″ les normales à ces lignes (*fig.* 30, *Pl. VIII*).

Nous pouvons supprimer la ligne C, à la condition d'appliquer au corps, outre les forces qui agissent réellement sur lui, une force fictive convenable dirigée suivant CN″.

Digitized by Google

Le système ne sera plus assujetti alors qu'à s'appuyer sur les deux lignes A et B; mais cela revient à dire (§ 54) qu'il est assujetti à tourner autour du point d'intersection O des normales à ces lignes, comme si ce point était fixe. Donc, en rétablissant la surface C, on voit que les conditions données sont les mêmes que si le corps était assujetti à tourner autour du point fixe O et à s'appuyer sur une ligne fixe. Ce problème a été résolu au paragraphe précédent.

§ 57.

DÉCOMPOSITION GRAPHIQUE D'UN SYSTÈME DE FORCES SUIVANT TROIS LIGNES QUELCONQUES SITUÉES DANS LEUR PLAN. — Le problème qui fait l'objet du paragraphe précédent consiste à *décomposer la résultante d'un système de forces données par leurs lignes d'action et leur polygone des forces suivant trois lignes arbitrairement données dans le plan, ou, ce qui revient au même, à déterminer les grandeurs de trois forces dont les lignes d'action sont données, de manière qu'elles fassent équilibre à un système de forces données.*

Ce problème se présentant souvent dans les applications, nous allons le traiter directement, au lieu de le ramener à celui qui fait l'objet du § 55.

Soient (*fig.* 29, *Pl. VIII*)

1, 2, 3, 4

les lignes d'action des forces données, les grandeurs de ces forces étant représentées par les côtés

1, 2, 3, 4

du polygone des forces (*fig.* 29).

Soient XX′, YY′, ZZ′ les lignes suivant lesquelles doivent être dirigées les forces qu'il s'agit de déterminer de façon à tenir en équilibre le système proposé.

Supposons le problème résolu, et soient 5, 6, 7 les grandeurs des forces cherchées sur le polygone des forces. Appelons 5, 6, 7 leurs lignes d'action données XX′, YY′, ZZ′.

Partant d'un point 7 de la ligne ZZ′, construisons le polygone

funiculaire relatif à un pôle quelconque O. Soit 71234567 ce polygone, qui est fermé ainsi que le polygone des forces, puisque le système est par hypothèse en équilibre.

Sur le polygone des forces on connaît le contour formé par les lignes 1, 2, 3, 4, ainsi que la position des lignes indéfinies 5 et 7, dont la première passe par l'extrémité b du polygone des forces données et est parallèle à 5 ou XX′, et dont la seconde passe par l'origine a du même polygone et est parallèle à 7 ou ZZ′. Ce qu'il faut déterminer, c'est la position du côté 6 ou xy qui est parallèle à 6. Cette ligne déterminera les grandeurs 5, 6, 7 des trois forces inconnues.

Du polygone funiculaire on connaît la portion 71234 5 dont les côtés sont parallèles aux rayons 71, 12, 23, 34, 45.

Prolongeons sur le polygone des forces les lignes 5 et 7 jusqu'à leur rencontre en u et joignons Ou.

Sur le polygone funiculaire prolongeons deux des lignes données, par exemple celles XX′ et YY′ jusqu'à leur rencontre en m; par ce point menons mn parallèle à ZZ′, et prolongeons 67 jusqu'à sa rencontre avec mn en n; enfin joignons 5n.

Les six lignes qui joignent les quatre points

$$5,\ 6,\ m,\ n$$

du polygone funiculaire sont réciproques des six lignes qui joignent les quatre points

$$O,\ x,\ y,\ u$$

du polygone des forces; car, par construction, les cinq lignes

$$5m,\ mn,\ m6,\ 56,\ 6n$$

sont respectivement parallèles à celles

$$xu,\ yu,\ xy,\ Ox,\ Oy,$$

et l'on voit qu'aux deux triangles que forment les premières correspondent, dans les secondes, des lignes concourantes. Donc, en vertu du lemme établi au § 18, les lignes 5n et Ou sont parallèles.

De là la construction suivante :

Donnez aux lignes d'action des forces données les numéros consécutifs

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

et aux côtés qui les représentent sur le polygone des forces les numéros correspondants

1, 2, 3, 4.

Donnez les trois numéros suivants :

5, 6, 7,

aux lignes d'action des trois forces inconnues.

Partant d'un point quelconque 7 de la dernière de ces lignes, construisez le polygone funiculaire relatif à un pôle quelconque O des forces données. Soit 7 1 2 3 4 5 ce polygone. Prolongez les lignes données 5 et 6 jusqu'à leur rencontre en m, et menez mn parallèle à 7.

D'un autre côté, par l'origine du polygone des forces menez une parallèle à 7, par son extrémité une parallèle à 5, et conduisez le rayon issu du pôle et aboutissant au point d'intersection u de ces deux lignes.

De l'extrémité 5 du polygone funiculaire menez une parallèle à ce rayon : cette parallèle coupera mn en un point n. Joignez n7, que vous prolongerez jusqu'à sa rencontre avec YY′ en 6, et joignez 65; puis, sur le polygone des forces menez Ox parallèle à 56 et Oy parallèle à 67; joignez xy. Les trois forces cherchées auront pour grandeurs et pour sens bx, xy et ya.

Remarque. — Si les trois lignes données XX′, YY′, ZZ′ concourent au même point m, la ligne ZZ′ coïncide avec mn, le point 7 avec n. Le problème est alors généralement impossible; car la ligne 5n coïncidant dans ce cas avec 5 7 qui ferme le polygone funiculaire ne sera pas, en général, parallèle à On. Si elle l'est, les deux points 7 et n, qui déterminent 6 7, coïncidant, cette ligne est indéterminée. Ainsi, dans ce cas, le problème est ou impossible ou indéterminé. C'est ce qu'il était aisé de prévoir; car, si la résultante des forces données ne passe pas par le point de concours des trois lignes XX′, YY′, ZZ′, on ne saurait l'équilibrer par trois forces dirigées suivant ces lignes, et, si elle y passe, on le peut d'une infinité de manières.

Digitized by Google

§ 57 *bis*.

Les *fig.* 34 et 34 (*Pl. IX*) résolvent le même problème dans le cas où les forces données 1, 2, 3, 4 sont parallèles entre elles, en sorte que leur polygone des forces, dont l'origine est a et l'extrémité b, se réduit à une ligne droite. Les lignes données sont XX′, YY′, ZZ′ ou 5, 6, 7. La solution est la même qu'au paragraphe précédent, et les notations aussi, en sorte qu'on s'expliquera la figure en reprenant l'énoncé de la règle établie au paragraphe précédent. La solution de ce cas particulier sera utilisée plus loin à l'occasion de la théorie des charpentes.

Remarque. — Parfois on a à décomposer une force donnée unique F suivant trois lignes données (*fig.* 33, *Pl. IX*).

On prolongera pour cela cette force jusqu'à sa rencontre avec l'une des lignes données ZZ′ en I; on prolongera les deux lignes XX′, YY′ jusqu'à leur rencontre en m. On décomposera F en deux forces dirigées, l'une suivant ZZ′, l'autre suivant Im. On décomposera ensuite cette dernière en deux, suivant XX′ et YY′, et l'on aura les trois composantes cherchées.

Cela revient, si f (*fig.* 33) est la ligne représentative de la grandeur de la force F, à mener par l'une des extrémités de f la ligne 3 parallèle à la ligne donnée 3, et par l'autre de ses extrémités x parallèle à Im, et par les extrémités de x, 1 et 2 parallèles aux lignes données 1 et 2.

§ 58.

CORPS REPOSANT PAR QUATRE POINTS SUR DES LIGNES DONNÉES OU AYANT DEUX POINTS FIXES. — SUR L'INDÉTERMINATION DES RÉACTIONS DES APPUIS. — Considérons maintenant un corps ayant (*fig.* 38, *Pl. IX*) deux points fixes O et O′. Il est bien clair que, quelle que soit la résultante des forces agissant sur lui, non-seulement il pourra se maintenir en équilibre, mais il pourra s'y maintenir d'une infinité de manières; car, si R est cette résultante, nous pouvons prendre au hasard un point I sur sa ligne d'action, et décomposer R suivant les deux lignes IO et IO′. Ces deux forces seront l'une et l'autre détruites par la fixité des points et fourniront les pressions exercées

Digitized by Google

par R sur ces points; mais, comme I est arbitraire, on voit que ces pressions sont ici indéterminées.

On arriverait exactement au même résultat si l'on assujettissait le corps à reposer par quatre points A, B, C, D sur quatre lignes (*fig.* 39, *Pl. IX*).

En effet, dire que le corps s'appuie sur les lignes A et B, cela équivaut (§ 54) à dire qu'il tourne autour d'un point fixe O, intersection des normales AO et BO à ces lignes. De même, dire qu'il s'appuie sur les lignes C et D, cela équivaut à dire qu'il tourne autour du point O′, intersection des normales CO′ et DO′ à ces lignes. Donc le problème est le même que si le corps avait deux points fixes O et O′.

En prenant un point I sur la résultante R des forces qui agissent sur lui et décomposant cette force en deux suivant IO et IO′, puis décomposant celle suivant IO en deux autres suivant AO et BO, et celle suivant IO′ en deux autres suivant O′C et O′D, on aura les pressions sur les quatre courbes; et, comme le point I est pris au hasard, ces pressions sont encore indéterminées.

Il est bon de remarquer que l'indétermination est ici moins grande que dans le cas où les points O et O′ sont *effectivement* fixes; car alors le point I peut occuper une position quelconque sur la ligne indéfinie suivant laquelle agit la force R, tandis qu'ici il ne peut occuper qu'une portion de cette ligne telle que la ligne IO tombe dans l'angle AOB, et celle IO′ dans l'angle CO′D. Autrement les forces suivant OA, OB, O′C, O′D ne seraient plus des *pressions*, c'est-à-dire qu'elles ne tendraient plus à faire porter le corps sur ses appuis.

Mais l'indétermination n'en existe pas moins; elle serait plus grande encore si, au lieu de quatre lignes d'appui, on en supposait cinq, six, etc. Elle se présenterait même déjà dans le cas de trois appuis (traité au § 56) si les normales à ces appuis concouraient en un même point O; car la résultante des forces agissant sur le corps devrait concourir en ce même point, et l'on pourrait la décomposer d'une infinité de manières suivant les trois directions issues de O.

Comment expliquer ces indéterminations?

Il est évident que, quand un corps de la nature repose sur des lignes ou surfaces fixes, quel que soit le nombre d'appuis sur les-

Digitized by Google

quels il porte, il est dans un état parfaitement déterminé. Pourquoi la Statique ne l'indique-t-elle pas?

D'Alembert voyait là un paradoxe que Poinsot a très-bien expliqué, qu'on peut expliquer aujourd'hui d'une façon plus complète encore.

Il est évident *a priori* que la répartition des pressions sur les appuis est déterminée en ce sens qu'elle doit toujours demeurer la même dans des circonstances *identiques*. Le problème à résoudre consiste à trouver cette répartition lorsque *toutes* les circonstances qui concourent à la définir sont connues; mais parmi ces circonstances il en est que la Statique est impuissante à mettre en œuvre : ce sont celles relatives aux formes des corps et aux changements qui se produisent dans ces formes par suite de l'élasticité de la matière.

La Statique suppose les corps solides invariables. Ceux de la nature ne sont pas dans ce cas : ils sont légèrement déformables en vertu de leur élasticité. Cependant les conditions d'équilibre relatives aux systèmes invariables leur sont (§ 38) rigoureusement applicables, comme elles le sont à tout système matériel, quelle qu'en soit la constitution. A ce point de vue, on peut dire que les relations de la Statique sont universelles. Seulement, tandis que, pour les systèmes invariables, elles fournissent les conditions d'équilibre à la fois nécessaires et suffisantes, dans les autres systèmes on ne les rencontre plus que comme conditions *nécessaires;* et, ce qui les caractérise toujours, c'est qu'elles sont indépendantes de la *forme* des corps sur lesquels agissent les forces. Il suffit, en effet, de connaître les grandeurs et les positions des lignes géométriques représentant un système de forces pour pouvoir effectuer sur ces forces toutes les opérations qui sont du ressort de la Statique; la forme des corps n'intervient pas.

Donc, parmi les relations existant entre les forces agissant sur un système quelconque, *celles-là seulement pourront être fournies par la Statique, qui sont indépendantes de la forme des corps;* et, pour qu'un problème consistant à déterminer des forces inconnues puisse être résolu par la Statique seule, il faut que ces forces demeurent les mêmes, quelles que soient les modifications de forme que le système peut subir en vertu de sa constitution ou de l'élasticité des corps qui le composent.

Dès qu'un problème exige qu'on se préoccupe de ces modifications de forme, les conditions d'équilibre fournies par la Statique,

tout en demeurant applicables, laissent nécessairement subsister une indétermination que le problème peut ne pas comporter. La Statique fournit alors ce qu'elle peut fournir : les relations entre les forces, indépendantes de la forme des corps; les autres ne sont pas de son ressort et doivent être demandées à d'autres sciences, telles que la Théorie mathématique de l'élasticité ou toute autre branche de la Physique mathématique.

Appliquons ces remarques à la recherche des réactions des appuis sur un système élastique non libre en équilibre sous l'action de forces quelconques. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un corps reposant sur des appuis fixes en nombre quelconque.

S'il est d'abord placé sur ses appuis sans qu'aucune force agisse sur lui, pas même la pesanteur, il affectera une certaine forme qui est ce qu'on nomme son *état naturel*. Si l'on vient à faire agir les forces, il prendra une forme nouvelle qui dépendra non-seulement des forces agissant sur lui, mais aussi des dimensions du corps, de la nature de la matière dont il est composé et de la position des appuis.

D'après les explications qui précèdent, la Statique devra fournir les réactions des appuis toutes les fois que ces appuis seront tels qu'ils n'entraveront pas la libre déformation du corps; car c'est alors seulement que les réactions pourront être indépendantes de sa forme. Ceci revient à dire que les obstacles doivent être en tel nombre qu'ils ne fassent au plus que déterminer la *position* du corps dans l'espace ou dans le plan, mais qu'ils ne contribuent en rien à la détermination de *sa forme*.

Toutes les fois que cette condition ne sera pas remplie, la Statique laissera le problème indéterminé, et la solution complète n'en pourra être obtenue que si l'on tient compte des qualités élastiques de la matière.

Ceci explique nettement tous les cas d'indétermination précédemment trouvés, aussi bien que les cas où la Statique seule a permis de trouver les réactions des appuis.

1° On peut toujours supposer à un corps un point fixe ou un point d'appui sur une courbe fixe, ou à la fois un point fixe et un point d'appui sur une courbe, ou trois points d'appui sur des courbes fixes, sans gêner en rien sa libre déformation. Toutes ces sujétions n'ont trait qu'à la position du corps dans le plan; aussi,

Digitized by Google

dans tous ces cas, la Statique nous a-t-elle fourni les réactions des appuis.

2° Mais on ne peut pas supposer à un corps deux points fixes sans faire obstacle à sa libre déformation, puisque deux points fixes obligent la ligne élastique qui les unit à demeurer invariable. De même on ne peut pas supposer plus de trois lignes d'appui, puisque trois lignes d'appui suffisent à déterminer la position du corps; et même si les normales aux trois lignes d'appui concourent en un point (qui peut être à l'infini, comme c'est le cas d'une pièce droite posée sur trois appuis en ligne droite), alors deux de ces appuis déterminent la position d'équilibre du corps, et le troisième devient superflu; en sorte que dans tous ces cas la Statique doit demeurer impuissante. C'est en effet ce qui a lieu. On voit donc, par les explications qui précèdent, qu'on peut toujours dire *a priori* si les problèmes de la recherche des forces inconnues sont ou non du ressort de la Statique, et cette remarque très-simple n'a pas, que nous sachions, été faite, ou du moins ne l'a pas été avec cette précision qui permet de s'en servir comme d'une propriété caractéristique de la Statique.

Le Mémoire que nous donnons à la suite de cet Ouvrage (Note II) n'est qu'une application de l'Analyse destinée à rendre ces considérations plus précises, afin d'en mieux permettre la mise en application.

CHAPITRE VI.

ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES PLANS LIBRES OU NON FORMÉS DE BARRES INFLEXIBLES, ARTICULÉES. RECHERCHE GRAPHIQUE DES TENSIONS DES BARRES.

§ 59.

TENSION D'UN FIL. — TENSION OU PRESSION D'UNE BARRE. — Considérons d'abord (*fig.* 36, *Pl. IX*) un fil ab tendu en ses deux extrémités par deux forces f et f', dirigées suivant ab, égales et opposées, maintenant par conséquent le fil en équilibre.

Chacune de ses parties, telle que ma, est également en équilibre; or cette partie est soumise à deux forces : 1° la force f agissant en a; 2° l'action que la partie mb du fil exerce sur la partie ma. Cette action se nomme la *tension* exercée par la première portion du fil sur la seconde.

La tension du fil équivaut nécessairement à une force f'', égale et contraire à f, puisqu'elle maintient ma en équilibre.

Inversement la partie ma exerce sur mb une tension f''', égale et contraire à f', puisque mb est en équilibre sous l'action des forces f' et f'''.

Ainsi, en tout point m d'un fil tendu par deux forces égales et contraires agissant en ses extrémités, on peut considérer deux tensions : celle que la portion du fil placée à gauche de m exerce sur celle de droite et inversement. Ces deux forces sont égales et opposées, *elles sont les mêmes dans toute l'étendue du fil* et égales en valeur absolue aux forces agissant en ses deux extrémités.

La même chose aurait lieu évidemment si ab, au lieu d'être un fil, était une barre rigide. Dans le cas d'une barre ab (*fig.* 37, *Pl. IX*), rien n'empêcherait de considérer aussi deux forces f et f', égales et opposées, et agissant de façon à *comprimer* la barre au lieu de la tendre. En faisant alors une section en m, on voit que la partie mb exerce sur ma un effort f'' égal et contraire à f et qui tendrait à comprimer cette portion de la barre; de même la portion ma exercerait sur mb une force f''' égale et contraire à f' ou à f'', et qui tendrait à comprimer la partie mb. Ces actions se nomment non plus des tensions, mais des *pressions*. La pression, comme la tension, est la même en valeur absolue dans toute l'étendue d'une barre en équilibre.

§ 60.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME A RÉSOUDRE. — Le problème général qui fait l'objet de ce Chapitre est celui-ci :

On donne une figure plane de la nature de celles que nous avons étudiées au Chapitre III. On en regarde les divers côtés comme des barres rigides (*); en ses sommets on applique un système de forces

(*) Rien n'empêche que celles des barres qui sont tendues soient remplacées par des fils flexibles.

Digitized by Google

situées dans le plan de la figure et la maintenant en équilibre; ces forces comprennent les poids des barres supposées décomposés chacun en deux composantes appliquées aux deux extrémités de la barre.

La figure étant en équilibre, chacune de ses parties est en équilibre et notamment chacune des barres qui la composent.

Concevons (*fig.* 20, *Pl. V*) que l'on coupe toutes les barres, telles que D, D_1, D_2,... qui aboutissent en un sommet q, excepté l'une d'elles pq ou A. L'équilibre ne sera pas troublé par ces sections, pourvu qu'on applique au point q des forces fictives égales aux tensions ou pressions exercées sur ce point par chacune des barres coupées.

On peut de même concevoir coupées toutes les barres, telles que B, B_1,..., autres que pq aboutissant en p, pourvu qu'à chacune d'elles on substitue une force fictive représentant sa tension ou pression.

Si l'on compose entre elles toutes les tensions appliquées en p, ainsi que les forces qui pourraient être directement appliquées en ce point, on aura une force unique que nous appellerons f. De même la résultante de toutes les forces (tensions ou autres) appliquées en q sera une certaine force f'.

Nous ne connaissons *a priori* ni la force f, ni la force f'; mais comme la barre pq est maintenue en équilibre par l'action de ces deux forces, nous sommes certains qu'elles sont égales entre elles, dirigées toutes deux suivant la ligne pq et de sens opposés. Leur grandeur commune représente la tension de la barre pq et leur sens indique si cette barre est tendue ou comprimée : c'est la grandeur et le sens de ces forces f et f' qu'on se propose de chercher pour chacune des barres A composant la figure.

Remarque. — Tant que le problème de la détermination des tensions ou pressions d'un système de barres n'est pas résolu, on ne sait pas si une barre donnée sera tendue ou pressée.

Nous parlerons habituellement de toutes les barres comme si elles étaient tendues, sauf à rectifier ce langage, une fois obtenue la solution du problème, qui nous apprendra quelles sont les barres effectivement tendues et quelles sont celles comprimées.

Digitized by Google

§ 61.

CAS PARTICULIER DES POLYGONES ARTICULÉS. — 1° Polygones articulés libres. — Considérons d'abord le cas simple d'un polygone fermé composé de barres articulées entre elles aux divers sommets du polygone. En chacun de ces sommets est appliquée une force. On demande de déterminer : 1° les conditions pour que ces forces puissent maintenir le polygone en équilibre; 2° les tensions des côtés du polygone lorsque l'équilibre existe.

Si le polygone formait un système indéformable ou invariable, les conditions d'équilibre des forces qui le sollicitent seraient celles indiquées au § 48; il faudrait et il suffirait que le polygone de ces forces et leurs divers polygones funiculaires fussent fermés; mais, comme les forces agissent ici sur un polygone qui est déformable dès qu'il contient plus de trois côtés, ces conditions cessent en général d'être suffisantes.

Pour découvrir toutes les conditions qui sont ici nécessaires et suffisantes, nous observerons que, si le polygone est en équilibre, chacun de ses sommets est séparément en équilibre sous l'action de la force qui y est appliquée et des tensions des deux barres qui y aboutissent, et qu'inversement, si chacun des sommets est en équilibre sous l'action de la force extérieure et des tensions qui le sollicitent, le polygone tout entier est en équilibre.

Ainsi tout le problème consiste à chercher les conditions pour que chaque sommet soit séparément en équilibre.

Soit (*fig.* 24, *Pl. VII*) le polygone donné :

$$6\,1\,2\,3\,4\,5\,6.$$

Soient

$$11',\ 22',\ 33',\ 44',\ 55',\ 66'$$

les lignes d'action des forces qui le sollicitent, les grandeurs de ces forces étant représentées par les côtés

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

du polygone des forces (*fig.* 24).

Pour que le sommet 1 du polygone donné soit en équilibre, il faut que la résultante des tensions des deux côtés 1 2 et 1 6, supposés coupés près de leur extrémité commune 1, soit une force égale et opposée à la force appliquée suivant la ligne d'action 1 1′. Donc, si par les extrémités de la ligne 1 du polygone des forces on mène des parallèles aux côtés 1 2 et 1 6 du polygone donné, les lignes O 1 2 et O 1 6 ainsi obtenues donneront les grandeurs des tensions des côtés 1 2 et 1 6 de ce polygone. La première sera dirigée de 1 2 vers O, la seconde de O vers 1 6. Ces forces sont donc de sens opposés aux sens que marquent les flèches placées suivant les lignes issues de O. Ces flèches indiquent le sens des composantes de la force 1 1′ suivant les côtés 1 6 et 1 2, c'est-à-dire le sens des *pressions* que la force 1 1′ exerce sur ces côtés, tandis que ce que nous cherchons ici, ce sont les *réactions* que ces côtés opposent à l'action de la force 1 1′ pour la tenir en équilibre, réactions égales et opposées aux composantes de 1 1′.

Passons maintenant au sommet 2. Pour qu'il soit en équilibre, il faut que la résultante des tensions des côtés 2 1 et 2 3 soit une force égale et opposée à celle qui est dirigée suivant la ligne 2 2′ et représentée par le côté 2 du polygone des forces; mais la tension suivant 2 1 est déjà représentée sur le polygone : elle est égale au rayon O 1 2 et dirigée de O vers 1 2, c'est-à-dire qu'elle est (§ 59) égale et opposée à la tension du côté 1 2 agissant au sommet 1. Donc la tension, suivant le côté 2 3, sera représentée par le rayon O 2 3 et dirigée de 2 3 vers O. Cela exige que le côté 2 3 soit parallèle à ce rayon. On verrait de même que tous les côtés suivants du polygone donné doivent être parallèles aux rayons issus de O, c'est-à-dire que ce polygone doit être un des polygones funiculaires des forces qui agissent sur ses sommets. Moyennant cette condition, les sommets successifs 1, 2, 3, 4, 5 sont en équilibre, et les rayons issus du pôle O mesurent les tensions des côtés successifs du polygone donné; mais quand on arrivera au dernier sommet 6, comme les tensions des deux côtés 6 1 et 6 5 qui y aboutissent sont connues l'une et l'autre et figurées au polygone des forces par les rayons 6 1 O ou *a*O et O 6 5 ou O*b*, il faut que la force agissant suivant la ligne 6 6′ soit égale à celle qui ferme le polygone des sept autres forces données.

Ainsi, *pour qu'un système de forces puisse maintenir en équi-*

Digitized by Google

libre un polygone fermé formé de barres articulées, il faut et il suffit : 1° que le polygone de ces forces soit fermé ; 2° que le polygone fermé sur lequel elles agissent soit un quelconque de leurs polygones funiculaires.

Ces conditions remplies, les rayons issus du pôle de ce polygone funiculaire représentent les tensions de ses divers côtés.

Remarque I. — On voit que les forces données doivent avoir leur polygone des forces fermé, ainsi qu'un de leurs polygones funiculaires, à savoir : le polygone sur les sommets duquel elles agissent ; par suite (§ 48) tous leurs polygones funiculaires sont fermés et elles satisfont aux conditions d'équilibre de tout système de forces agissant sur un solide invariable. C'est ce qui doit être, car on sait (§ 38) que les conditions nécessaires et suffisantes à l'équilibre des solides invariables ne cessent pas d'être *nécessaires* pour des forces agissant sur des systèmes déformables. Seulement alors elles ne sont plus suffisantes, et l'on voit, en effet, qu'ici elles ne sont pas suffisantes ; car, si elles sont remplies par un système de forces, ces forces ne peuvent pas maintenir en équilibre des polygones fermés quelconques, mais seulement leurs divers polygones funiculaires.

§ 61 *bis*.

2° Polygones articulés suspendus. — Considérons maintenant (*fig.* 24) un polygone non fermé

A 1 2 3 4 5 B

et suspendu par ses deux extrémités à deux points fixes A et B. En ses sommets appliquons des forces quelconques :

11′, 22′, 33′, 44′, 55′

et cherchons : 1° les conditions pour que ces forces le maintiennent en équilibre ; 2° les tensions qu'elles déterminent sur ses divers côtés ; 3° les pressions exercées sur les points fixes A et B.

Nous pouvons rendre le polygone libre à la condition d'appliquer suivant le côté A1 une force égale à la tension que la fixité du point A produit sur ce côté et, suivant le côté B5, une force

égale à la tension produite par la fixité du point B. Les forces agissant ainsi suivant les côtés A1 et B5 peuvent être considérées comme appliquées au point de concours 6 de ces côtés et composées entre elles : soit 66′ leur résultante.

Le problème consiste maintenant à trouver les conditions d'équilibre du polygone *fermé* et libre 1 2 3 4 5 6 1 soumis aux forces

$$11', 22', 33', 44', 55', 66',$$

dont la dernière est inconnue.

Or il résulte du paragraphe précédent que ces forces doivent remplir les conditions d'équilibre des forces agissant sur un système invariable, et que le polygone fermé sur lequel elles agissent doit être un de leurs polygones funiculaires. S'il en est ainsi, une portion quelconque de ce polygone fermé sera évidemment un des polygones funiculaires des forces appliquées en ses sommets. Ainsi la portion A 1 2 3 4 5 B sera un des polygones funiculaires des cinq forces données ; les rayons issus du pôle de ce polygone funiculaire et aboutissant aux divers sommets du polygone des forces données indiqueront les tensions des divers côtés du polygone funiculaire ; en particulier, les rayons extrêmes O*a* et O*b* indiquent les tensions des côtés extrêmes A1 et B5 du polygone funiculaire, et, par suite, les pressions exercées sur les points fixes A et B. Ainsi, *étant donné un système de forces quelconques, se faisant* ou non *équilibre, tout polygone funiculaire de ce système de forces étant considéré comme formé de barres articulées est en équilibre sous l'action de ces forces, si l'on en fixe les deux extrémités. Aucun autre polygone ne jouit de cette propriété.*

Remarque I. — C'est cette propriété qui a fait désigner les polygones dont il s'agit sous le nom de *polygones funiculaires*. Ce sont de tels polygones qui forment les câbles des ponts suspendus, et le nom générique de polygone funiculaire (en allemand *seil-polygon*, polygone formé de fils ou de cordes) appartient plus spécialement aux polygones dont les côtés, au lieu d'être formés de barres rigides, seraient formés de fils flexibles et inextensibles. Pour qu'on puisse substituer des fils aux barres, il faut que les divers côtés du polygone soient tous tendus, qu'aucun ne soit *comprimé*. C'est ce qui n'a pas lieu pour la *fig.* 24, par exemple.

Là, au contraire, tous les côtés sont comprimés.

On substitue parfois, dans ce cas, le nom de *polygone des pressions* à celui de polygone funiculaire, parce que ce polygone est employé pour le calcul des pressions des voûtes en maçonnerie; mais nous emploierons toujours le terme générique de polygone funiculaire, que tous les côtés soient tendus ou tous comprimés, ou quelques-uns tendus et d'autres comprimés.

Remarque II. — Plus le nombre des forces est considérable, plus le nombre des côtés des polygones funiculaires est grand; si les forces se rapprochent indéfiniment les unes des autres, les côtés des polygones deviennent de plus en plus petits et à la limite les polygones se transforment en courbes qu'on nomme, suivant le cas, *courbes funiculaires* ou *courbes des pressions*.

§ 62.

PROPRIÉTÉ MÉCANIQUE FONDAMENTALE DES FIGURES RÉCIPROQUES. — Avant d'aborder, dans sa généralité, le problème qui fait l'objet de ce Chapitre, nous résoudrons une question préliminaire à laquelle nous ramènerons ensuite ce problème.

Soit donnée une figure de la nature de celles que nous considérons. Supposons qu'aux deux extrémités de chacune des lignes ou barres composant la figure et suivant la direction de cette ligne on applique deux forces égales et opposées.

Ces forces deux à deux égales et opposées formeront évidemment un système en équilibre et cela quelles que soient les grandeurs communes aux deux forces dirigées suivant chaque barre.

Proposons-nous de déterminer, s'il se peut, ces grandeurs de façon que chaque sommet de la figure soit séparément en équilibre sous l'action des forces qui en sont issues.

Il faut et il suffit pour cela que le polygone des forces issues d'un quelconque des sommets soit fermé. Donc, si le problème posé est possible, il existera un système de lignes correspondant aux lignes de la figure donnée et tel, que les lignes correspondant à l'un quelconque des nœuds de cette figure forment un polygone fermé.

Mais nous avons montré au § 34 que, toutes les fois qu'il est pos-

sible de trouver un tel système de lignes, on peut construire un diagramme réciproque de la figure donnée.

Ainsi toutes les fois que le problème posé est possible, la figure donnée admet une figure réciproque. Il est d'ailleurs évident qu'inversement, si la figure donnée admet un diagramme réciproque, le problème posé admet une solution, puisqu'il suffit de prendre les forces appliquées suivant les lignes de la figure donnée proportionnelles aux côtés correspondants du diagramme réciproque, pour que de chacun des sommets de cette figure émanent des forces en équilibre.

Le problème posé est donc identique à celui de la construction du diagramme réciproque d'une figure donnée. Il est possible et déterminé, impossible ou indéterminé dans les cas spécifiés aux §§ 34 et 35.

§ 63.

SOLUTION GRAPHIQUE DU PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA RECHERCHE DES TENSIONS D'UN SYSTÈME DE BARRES. — Considérons maintenant (*fig.* 64, *Pl. XIII*) une figure quelconque.

En ses divers sommets, appliquons un système de forces : 1, 2, 3, 4,... maintenant la figure en équilibre, et proposons-nous de trouver les tensions que ces forces déterminent sur les divers côtés de la figure.

Que la figure donnée soit déformable ou non, les forces qui y sont appliquées satisfont (§ 39) aux conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un solide invariable. Donc 1° leur polygone des forces est fermé (ce polygone est indiqué par des lignes doubles sur la figure 64); 2° leurs polygones funiculaires sont également fermés.

Traçons un de ces polygones funiculaires, par exemple celui qui est indiqué sur la *fig.* 64 par des lignes pointillées et qui est relatif au pôle O (*fig.* 64).

Appelons (F) la figure donnée et (F_1) la figure complète composée de (F), du polygone funiculaire dont nous venons de parler et des lignes d'action des forces données, lesquelles réunissent les sommets du polygone funiculaire aux sommets de (F).

Je dis que si, comme nous le supposons, la figure primitive (F) est en équilibre sous l'action des forces données, la nouvelle figure (F_1) admet *au moins* une figure réciproque, c'est-à-dire (§ 62) que l'on peut *au moins* d'une manière appliquer suivant ses divers côtés des forces égales et contraires maintenant ses divers sommets séparément en équilibre.

En effet, puisque les forces données maintiennent par hypothèse la figure primitive (F) en équilibre, chacun de ses sommets est séparément en équilibre sous l'action de ces forces et de deux forces égales et contraires dirigées suivant chacune de ses barres, à savoir : les tensions que les forces données déterminent dans ces barres.

Maintenant, en chacun des sommets du polygone funiculaire, appliquons une force égale et opposée à la force extérieure passant en ce point ; chacun des sommets du polygone funiculaire sera (§ 61) séparément en équilibre sous l'action de la force qui s'y trouve ainsi appliquée et des tensions que cette force détermine dans les deux côtés adjacents du polygone. Donc chacun des sommets de la figure complète (F_1) est séparément en équilibre, et cette figure admet au moins un diagramme réciproque.

Inversement, si la figure complète (F_1) admet un diagramme réciproque, le système des forces données sera en état de maintenir la figure donnée (F) en équilibre et de déterminer, dans ses diverses barres, des tensions représentées par les lignes correspondantes du diagramme réciproque. En effet, la figure (F_1) admettant une figure réciproque, si l'on applique, suivant chacune de ses lignes, deux forces égales et contraires et égales aux lignes correspondantes du diagramme réciproque, chacun de ses sommets sera (§ 62) séparément en équilibre. Donc, si l'on conçoit que l'on coupe toutes les lignes 1, 2, 3,... et qu'on détache la partie inférieure de la figure, la partie restante (F) sera en équilibre sous l'action des forces dirigées suivant les lignes dont il s'agit. Ces forces sont d'ailleurs égales aux lignes correspondantes 1, 2, 3 du diagramme réciproque, c'est-à-dire aux forces données. Donc les forces données maintiennent la figure (F) en équilibre, et les lignes du diagramme réciproque de (F_1) pourront représenter les tensions que ces forces déterminent dans les barres de la figure (F). S'il n'existe qu'un seul diagramme réciproque, on sera certain

Digitized by Google

que les lignes de ce diagramme représentent *effectivement* les tensions des barres données. S'il existe une infinité de diagrammes réciproques du diagramme (F_1), cela indique qu'on peut, d'une infinité de manières, décomposer les forces données suivant les lignes de la figure (F); chaque diagramme réciproque indique un mode de décomposition possible, c'est-à-dire que les lignes de chacun de ces diagrammes indiquent un système de tension que les forces données *peuvent* produire sur les barres de la figure (F). Parmi tous ces systèmes de tensions, quel est celui qui se produira effectivement? C'est ce que la Statique seule ne saurait préciser. Elle laisse subsister ici une indétermination tout à fait analogue à celle que nous avons rencontrée au § 58 dans la recherche des réactions des appuis, et cette indétermination s'explique de la même manière. Toutes les fois que les tensions d'un système de barres ne dépendent que de la forme de la figure géométrique formée par ces barres, et non de leurs sections et de la nature des matières dont elles sont composées, la Statique suffit à les trouver; mais si les tensions dépendent de la section des barres et de leur matière, la Statique ne fournit entre elles que les seules relations qu'elle peut fournir, à savoir : celles qui ne dépendent que de la forme géométrique de la figure formée par les axes des barres; les autres sont du ressort de la Physique mathématique.

Un exemple très-simple le fera bien comprendre.

Supposons (*fig.* 40, *Pl. IX*) qu'on veuille soutenir un point P par deux barres Oa et Ob, scellées dans un mur. On demande de déterminer les tensions que ce poids exerce sur les barres.

Il suffira évidemment, pour cela, de décomposer le poids P en deux forces f_1 et f_2, suivant les directions des barres; ces deux composantes fourniront la solution du problème; la barre Oa subit une *tension* f_1, la barre Ob une *pression* f_2. La solution est ici indépendante de la nature des matières dont les barres sont composées et de leurs sections. C'est pourquoi la Statique fournit la solution du problème.

Supposons maintenant (*fig.* 41, *Pl. IX*) que le poids P soit soutenu par trois barres, Oa, Ob, Oc. Comment se répartiront les tensions entre ces barres? La Statique laisse le problème indéterminé; car on peut, d'une infinité de manières, décomposer la force P, suivant les trois directions Oa, Ob, Oc. Parmi tous les modes de ré-

Digitized by Google

partition des forces, il est impossible de dire celle qui se produira tant qu'on ne donnera pas les sections des barres et leurs coefficients d'élasticité. Une fois ces éléments donnés, il appartient à la Théorie mathématique de l'élasticité de les mettre en œuvre pour compléter les renseignements fournis par la Statique.

Maintenant quelles sont, d'une manière générale, les figures planes dont les tensions peuvent être déterminées à l'aide des seules ressources de la Statique graphique? La solution précédente nous permet de répondre très-nettement à cette question.

§ 64.

DISCUSSION DE LA SOLUTION PRÉCÉDENTE. — Supposons d'abord (*fig.* 64, *Pl. XIII*) la figure donnée (F), libre dans son plan.

De ce que (§ 63) la figure complète (F_1) admet au moins un diagramme réciproque toutes les fois que la figure donnée (F) est en équilibre, et *vice versâ,* on déduit que les conditions d'équilibre des forces agissant sur la figure (F) sont identiques aux conditions géométriques que doit remplir la figure (F_1) pour admettre un diagramme réciproque. Or ces dernières conditions ont été indiquées au § 37.

Figures libres et indéformables. — 1° Quand la figure donnée est indéformable, trois conditions sont nécessaires et suffisantes pour que la figure (F_1) admette une figure réciproque dans laquelle le polygone réciproque des lignes 1, 2, 3,... est donné : d'où l'on peut déduire que, pour qu'un système de forces maintienne en équilibre une figure indéformable, il faut et il suffit que ces forces satisfassent à trois conditions : c'est ce que nous savons déjà, d'après la théorie du § 48; et, de plus, en rapprochant les conditions d'équilibre des forces agissant sur des systèmes invariables trouvées au § 49 des conditions purement géométriques pour que la figure (F_1) admette une figure réciproque trouvées au § 37, on voit qu'elles sont identiques. Mais il résulte de plus de la théorie géométrique du § 37 que, ces conditions remplies, la figure (F_1) admet un seul diagramme réciproque ou une infinité, suivant que la figure donnée est *strictement* indéformable ou à lignes surabondantes; d'où nous pouvons déduire que, si une figure plane indéformable est libre dans son plan, pour que la Statique permette de déterminer les

tensions de ses barres, il faut et il suffit qu'elle ne contienne pas de lignes surabondantes; en d'autres termes, il faut et il suffit qu'elle soit strictement indéformable.

Figures libres et déformables. — 2° Quand la figure donnée est déformable de k manières (k étant zéro pour la figure strictement indéformable), alors il faut (§ 37) $k + 3$ conditions géométriques pour que la figure (F_1) admette une figure réciproque. Donc, *pour qu'un système de forces maintienne en équilibre une figure déformable de k manières différentes, il faut et il suffit que ces forces satisfassent à $k + 3$ conditions.*

Ces conditions remplies, le théorème géométrique du § 37 nous apprend que la figure (F_1) n'admet qu'un seul diagramme réciproque, ce qui signifie que les tensions de toutes les barres sont déterminées.

C'est ce qu'il est aisé de vérifier directement. En effet, une figure déformable de k manières devient strictement indéformable si l'on y ajoute k nouvelles barres, et alors, pour qu'elle soit en équilibre, il faut et il suffit que les forces qui la sollicitent satisfassent à trois conditions. Ces conditions remplies, les tensions de toutes ces barres sont, d'après ce que nous venons de voir, entièrement déterminées.

Mais, pour que la figure ne cesse pas d'être en équilibre, si l'on supprime les k barres qu'on vient de lui adjoindre, il faut que les tensions de ces barres soient nulles, ce qui donne lieu à k nouvelles conditions entre les forces extérieures, soit en tout $k + 3$; et ces $k + 3$ conditions remplies, les tensions de toutes les barres sont déterminées.

Donc, en résumé, *pour que la Statique suffise à déterminer les tensions d'un système de barres formant une figure plane libre dans son plan, il faut et il suffit que cette figure soit déformable, ou strictement indéformable, mais qu'elle ne contienne aucune ligne surabondante.*

§ 65.

FIGURES NON LIBRES. — Supposons maintenant une figure déformable de k manières soumise, dans ses déplacements, à i conditions pouvant consister en ce que des points sont fixes ou assujettis

à se mouvoir sur des lignes données, ou à conserver entre eux des distances fixes.

Il résultera de ces sujétions i réactions d'appuis ou forces inconnues qu'il faudra adjoindre aux forces données pour pouvoir regarder la figure comme libre.

Si i est égal à $k+3$, on pourra disposer des $k+3$ forces indéterminées que fournissent les réactions des appuis pour satisfaire aux $k+3$ conditions nécessaires (§ 37) pour que la figure (F_1) admette une figure réciproque et une seule.

Si i est inférieur à $k+3$, on pourra disposer des i réactions indéterminées pour satisfaire à i des conditions dont il s'agit; les forces données devront être telles que les $k+3-i$ autres conditions soient remplies d'elles-mêmes, puisque, par hypothèse, ces forces maintiennent le système en équilibre.

Si i est supérieur à $k+3$, après avoir disposé de $k+3$ des i réactions pour remplir les conditions voulues, il restera encore $i-(k+3)$ réactions indéterminées et que la Statique ne permettra pas de déterminer.

L'indétermination augmenterait encore si la figure donnée contenait des lignes surabondantes, puisque alors elle existerait même si toutes les réactions des appuis étaient définies.

Donc, en résumé :

Pour que la Statique graphique puisse déterminer les tensions d'un système de barres situées dans un plan et en équilibre sous l'action de forces situées dans ce plan, ainsi que les réactions des appuis si le système n'est pas libre, il faut et il suffit : 1° *que ces barres forment une figure déformable ou strictement indéformable;* 2° *que si elle est déformable de k manières (k étant nul dans le cas des figures strictement indéformables), elle soit soumise, dans ses déplacements, à au plus* $k+3$ *conditions.*

CHAPITRE VII.

PROJECTIONS ET MOMENTS DES FORCES SITUÉES DANS UN PLAN.

§ 66.

ÉQUIVALENCE ENTRE LE ROLE ANALYTIQUE DES PROJECTIONS DES FORCES ET LE ROLE GRAPHIQUE DU POLYGONE DES FORCES. — Nous venons d'exposer la théorie complète de la composition des forces situées dans un plan sans recourir aux *projections* et aux *moments* dont la Statique ordinaire fait un si grand usage. Nous pourrions, à la rigueur, nous passer entièrement de ces éléments; mais, outre qu'il serait puéril de se priver volontairement d'instruments de recherche aussi précieux, il nous paraît utile d'exposer la théorie des moments et celle des projections des forces, ne fût-ce que pour bien montrer que les règles analytiques qu'elles fournissent pour l'équilibre et la composition des forces sont équivalentes aux règles graphiques que nous venons d'établir. En ce qui touche les projections, cette équivalence est en quelque sorte manifeste.

Nous avons vu que la résultante d'un système de forces distribuées dans un plan est égale en grandeur, direction et sens à la somme de ces forces, c'est-à-dire à la droite qui va de l'origine à l'extrémité du polygone des forces. Donc (§ 6) :

La projection sur un axe quelconque de la résultante d'un système de forces situées dans un plan est égale à la somme des projections de ces forces sur le même axe.

Ce dernier énoncé fournit, aussi bien que l'emploi du polygone des forces, la grandeur et le sens de la résultante d'un système de forces.

Car, étant donné un système de forces, on peut trouver leurs projections et, par suite, les sommes de leurs projections sur deux axes Ox, Oy (*fig.* 42, *Pl. IX*) qui se coupent. Ces sommes représentent : l'une OA, la projection de la résultante sur l'axe Ox; l'autre, OB, sa projection sur l'axe Oy. Or, connaissant en gran-

Digitized by Google

deur et sens les projections d'une ligne sur deux droites qui se coupent, on peut construire cette ligne en grandeur, direction et sens. Il suffit, par l'extrémité A de sa projection sur Ox, d'élever une perpendiculaire à cette droite; par l'extrémité B de sa projection sur Oy, d'élever une perpendiculaire à Oy. La ligne qui va de O au point d'intersection C de ces deux perpendiculaires représente, en grandeur, direction et sens, la résultante cherchée. Au point de vue graphique, cette construction, qui consiste à chercher les projections de toutes les forces données sur deux axes, à construire les lignes représentant les sommes de ces projections sur chaque axe, à les porter à partir de leur point d'intersection O suivant OA et OB, à élever les perpendiculaires AC et BC, serait incomparablement moins commode que celle que fournit l'emploi du polygone des forces; au point de vue analytique, c'est, au contraire, le théorème des projections qui est d'un emploi plus commode.

Ainsi, si les forces données sont

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots, \quad P_n;$$

si

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots, \quad \alpha_n$$

représentent les angles que ces forces, prolongées dans le sens de leur action, font avec l'axe Ox prolongé dans le sens convenu Ox; si R est la grandeur de la résultante de ces forces et θ l'angle qu'elle fait avec Ox, le théorème des projections appliqué aux axes Ox et Oy donnera

$$(a) \qquad \begin{cases} R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots + P_n\cos\alpha_n, \\ R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \ldots + P_n\sin\alpha_n. \end{cases}$$

En divisant ces équations membre à membre, R disparait, et l'on obtient une équation qui fournit l'angle θ. Si on les ajoute après les avoir élevées au carré, comme

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

on obtient une équation d'où l'angle θ disparait et qui fournit la grandeur de la résultante R.

Digitized by Google

§ 67.

DÉFINITION ET CONSTRUCTION GRAPHIQUE DU MOMENT D'UNE FORCE. — On appelle *moment* d'une force F (*fig.* 43, *Pl. X*) autour d'un point C ou par rapport au point C le produit de cette force par la longueur de la perpendiculaire abaissée du point C sur sa ligne d'action. Cette perpendiculaire CP est ce qu'on nomme le *bras de levier* de la force F autour du point C. Le moment est compté positivement ou négativement, suivant que la force tend à faire tourner son bras de levier dans un sens convenu pris pour sens des moments positifs ou en sens contraire.

Pour construire le moment par rapport au point C d'une force dont la ligne d'action est F, et dont la grandeur est représentée par la ligne $ab = f$ (*fig.* 43), prenons un point O à une distance de f égale à l'unité de longueur; joignons ce point aux extrémités a et b de f; puis, par un point quelconque I de F, menons des parallèles ID et IE à Oa et Ob.

Ces lignes une fois tracées, pour avoir le moment de F par rapport au point quelconque C, il suffit de mener par ce point une parallèle à F. Le segment xy que détermine sur cette parallèle l'angle DIE représente le moment cherché. En effet, les triangles Ixy et Oab étant semblables, leurs bases sont entre elles comme leurs hauteurs.

Donc

$$\frac{xy}{f} = \frac{\text{CP}}{1},$$

d'où

$$xy = f \times \text{CP}.$$

Remarque. — Si le point O était à une distance H de f, la proportion ci-dessus deviendrait

$$\frac{xy}{f} = \frac{\text{CP}}{\text{H}},$$

d'où

$$xy = \frac{f \times \text{CP}}{\text{H}},$$

en sorte que, si la longueur H était égale à n unités, xy serait la

Digitized by Google

$n^{ième}$ partie du moment cherché. Si $H = \frac{1}{n}$, xy sera n fois le moment cherché, et l'on trouvera celui-ci en prenant la $n^{ième}$ partie de xy.

Parfois, pour la commodité des constructions, il peut être utile de prendre ainsi pour H un nombre entier d'unités, ou une fraction déterminée de l'unité.

§ 68.

CONSTRUCTION DU MOMENT DE LA RÉSULTANTE D'UN SYSTÈME DE FORCES. — Soit donné un système de forces représentées par leurs lignes d'action et leur polygone des forces; soient, par exemple, les forces ayant pour lignes d'action (*fig.* 17, *Pl. IV*)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

et pour polygone des forces (*fig.* 17) le polygone dont les côtés sont

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

la résultante de ces forces a pour grandeur ab et pour ligne d'action 8 8'. Si le pôle O du polygone funiculaire 8 1 2 3 4 5 6 7 8 est distant d'une unité de la ligne ab, pour avoir le moment de la résultante autour du point quelconque C, il suffit, par ce point, de mener une parallèle à cette résultante; le segment xy que cette parallèle détermine dans l'angle formé par les côtés extrêmes 8 1 et 8 7 du polygone funiculaire prolongés au besoin représentera (§ 67) le moment cherché.

On voit par là avec quelle remarquable facilité le polygone des forces et le polygone funiculaire se prêtent à la construction des moments. Nous verrons plus loin, dans les applications aux constructions, combien ce procédé est précieux pour la recherche de ce qu'en résistance des matériaux on appelle les *moments fléchissants*.

Si O était distant d'un nombre entier n d'unités de longueur de la ligne ab, la ligne xy représenterait la $n^{ième}$ partie du moment cherché; si O était distant de ab d'une fraction $\frac{1}{n}$ de l'unité de longueur, le moment cherché serait $\frac{xy}{n}$.

Remarque I. — Le moment d'une force autour d'un point ne

change pas lorsqu'on déplace son point d'application sur sa ligne d'action.

Remarque II. — Le moment d'une force est numériquement égal au double de l'aire d'un triangle ayant pour base la grandeur de la force et pour sommet le point autour duquel est pris le moment, point qu'on nomme parfois le *centre* des moments.

Ainsi (*fig.* 43, *Pl. X*), si AB est la grandeur de la force F, son moment autour du point C est numériquement égal au double de l'aire du triangle CAB. En regardant ce triangle comme ayant pour base la ligne AC joignant le centre du moment au point d'application de la force, on voit que le double de son aire est égal au produit de AC par la projection B′C de la force F sur un axe XX′ perpendiculaire à AC, en sorte que ce produit peut également représenter, en grandeur, le moment de la force F autour du point C. Il peut aussi le représenter en signe; car la projection CB′ est dirigée sur l'axe indéfini XX′, de X vers X′ ou *vice versâ*, suivant que la force F tend à faire tourner son bras de levier CP de façon à le coucher sur la partie CX′ ou sur son prolongement, c'est-à-dire que la projection CB′ change de sens en même temps que le moment de la force F change de signe; donc en comptant les projections positivement ou négativement, suivant qu'elles sont ou non dirigées dans le sens dans lequel la force amène son bras de levier lorsque le moment est pris positivement, le moment sera égal en grandeur et en signe au produit de CA par la projection de la force F sur la ligne XX′.

Habituellement on compte positivement les moments des forces qui tendent à faire tourner leurs bras de levier dans un sens tel qu'un observateur ayant les pieds en C les voit tourner de gauche à droite ou dans le sens des aiguilles d'une montre. D'après cette convention, le moment de la force F serait négatif, et la partie CX de l'axe XX′ devrait être regardée comme positive pour que le moment de la force F fût représenté en grandeur et en signe par le produit de AC par la projection de cette force sur XX′.

§ 69.

Lemme. — *Lorsque des forces situées dans un plan sont concourantes, le moment de leur résultante par rapport à un point quel-*

conque est égal à la somme de leurs moments par rapport à ce point.

Soit, en effet, un système de forces concourant en A (*fig.* 43, *Pl. X*). Le moment de l'une quelconque de ces forces F est égal à la projection de F sur l'axe XX′ multipliée par AC; le moment de la résultante est de même égal à sa projection sur XX′ multipliée par AC; et comme la projection de la résultante est (§ 66) égale à la somme des projections des composantes, le produit de la projection de la résultante par la longueur AC sera égal à la somme des produits des projections des composantes par la même longueur AC, ce qui démontre le théorème énoncé.

§ 70.

Théorème. — *Le moment par rapport à un point de la résultante ou du couple résultant d'un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan est égal à la somme des moments de ces forces par rapport à ce point.*

Car, pour obtenir cette résultante ou ce couple résultant, on ne fait (§ 45) que deux opérations : 1° composer entre elles ou décomposer des forces concourantes; 2° déplacer les points d'application de certaines forces sur leurs lignes d'action. Or aucune de ces opérations ne change la somme des moments des forces sur lesquelles on opère. Donc, si ces opérations conduisent finalement à une résultante unique, le moment de cette résultante sera égal à la somme des moments des forces primitivement données, et si l'on est amené à un couple, la somme des moments des deux forces composant le couple est de même égale à la somme des moments des forces qui y ont donné lieu.

Remarque. — La somme des moments de deux forces composant un couple demeure constante, quelle que soit la position du point autour duquel on prend les moments.

En effet, soit (*fig.* 44, *Pl. X*) un couple formé de deux forces F et — F; le moment de F par rapport au point C est $F \times CP$; le moment de — F par rapport à ce point est $F \times CP'$, et comme la force — F et la force F tendent à faire tourner leurs bras de levier

CP et CP′ en sens contraires, la somme de leurs moments est

$$F \times CP - F \times CP' = F \times PP'.$$

Cette distance PP′ entre les deux forces F et — F est ce qu'on nomme le *bras de levier* du couple.

Si le point C était placé en C_1 entre les lignes d'action des forces du couple, les deux forces tendraient à faire tourner leurs bras de levier C_1P et C_1P' dans le même sens, en sorte que leurs moments seraient de mêmes signes : la somme de ces moments serait donc

$$F \times C_1P + F \times C_1P',$$

soit toujours $F \times PP'$.

Donc : *la somme des moments des deux forces d'un couple autour d'un point quelconque de son plan est constante et égale au produit de la force du couple par son bras de levier ; ce produit se nomme le* moment *du couple.*

Nous avons vu (§ 49) que, quand un système de forces se réduit à un couple, on peut le ramener à une infinité d'autres couples dont les forces peuvent être arbitrairement données en grandeur et en position ; mais on voit que le moment de tous ces couples est le même, en sorte que la grandeur de leurs forces est en raison inverse de leur écartement ou du bras de levier du couple.

§ 71.

ÉQUIVALENCE ENTRE LE ROLE ANALYTIQUE DES MOMENTS DES FORCES ET LE ROLE GRAPHIQUE DES POLYGONES FUNICULAIRES. — De même que le théorème des projections joue en Statique ordinaire le même rôle que le polygone des forces en Statique graphique, de même le théorème des moments donne analytiquement le résultat que le polygone funiculaire fournit graphiquement, c'est-à-dire qu'il donne un point de la ligne d'action de la résultante dont la grandeur, la direction et le sens sont connus par le théorème des projections.

Si, en effet,

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots, \quad P_n$$

sont les grandeurs des forces données ;

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \ldots, \quad p_n$$

les distances de leurs lignes d'action à un point donné O du plan; si R est la résultante et r sa distance au point O, le théorème des moments montre que

$$(b) \qquad Rr = P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots + P_np_n = \Sigma P_ip_i,$$

en appelant Σ la somme algébrique que représente le second membre. Cette somme est connue; la grandeur de la résultante R est également connue par les formules (a) du § 66; donc la relation ci-dessus fournit la distance r de la ligne d'action de la résultante au point O, et cela suffit pour que cette ligne d'action, dont la direction est connue par le théorème des projections, soit définie. Elle l'est d'ailleurs sans ambiguïté : il existe, il est vrai, deux lignes parallèles à une direction donnée, distantes du point O d'une longueur r; mais il faudra prendre celle des deux qui permettra à la force R, dont le sens est connu, de faire tourner son bras de levier dans le sens déterminé par le signe du second membre de l'équation (b).

On comprend qu'au point de vue analytique l'application de l'équation (b) est très-commode pour trouver la ligne d'action de la résultante; mais, au point de vue graphique l'emploi du polygone funiculaire est incomparablement plus simple que ne le serait la construction directe de la valeur de r fournie par cette équation.

§ 72.

La solution analytique de la composition des forces que nous venons d'exposer sommairement donne lieu à la même discussion que la solution graphique exposée au Chapitre IV, § 48 et 49 :

1° Si les sommes des projections des forces données sur deux axes qui se coupent ne sont pas nulles *l'une et l'autre,* alors les équations (a) du § 66 fournissent, pour la grandeur et la direction de la résultante R, des valeurs déterminées; de plus R sera différent de zéro : il en résulte que l'équation ci-dessus (b) fournit pour r une valeur finie. Donc la ligne d'action de la résultante R sera déterminée. Ainsi, dans ce cas, les forces données admettent réellement une résultante.

2° Si les sommes des projections des forces données sont nulles

l'une *et* l'autre, alors les équations (a) indiquent que la résultante R est de grandeur nulle.

En ce cas, l'équation (b) fournit pour r une valeur infinie ou indéterminée, suivant que la somme des moments des forces données relativement au point O est ou non différente de zéro.

Dans le premier cas, les forces données admettent une résultante nulle dont le point d'application est à l'infini. C'est, comme nous l'avons vu (§ 49), l'équivalent d'un couple; et comme le moment d'un couple est indépendant de la position du centre des moments, il s'ensuit que si la somme des moments des forces données relativement à un point particulier O est différente de zéro, elle l'est pour tout autre point du plan; si, au contraire, cette somme est nulle pour un seul point O, elle l'est pour tout autre point, et alors le système se réduit à un couple dont le moment est nul, ou, si l'on veut, dont le bras de levier est nul, c'est-à-dire à un système de deux forces égales et opposées : il est donc en équilibre.

Ainsi :

1° *Pour qu'un système de forces situées dans un plan admette une résultante unique, il faut et il suffit que les sommes de leurs projections sur deux axes qui se coupent ne soient pas nulles l'une et l'autre.*

2° *Pour qu'un système de forces situées dans un plan se réduise à un couple, il faut et il suffit que les sommes des projections de ces forces sur deux axes quelconques qui se coupent soient nulles l'une et l'autre, et que la somme de leurs moments, autour d'un point quelconque du plan, soit différente de zéro.*

3° *Pour qu'un système de forces situées dans un plan soit en équilibre, il faut et il suffit que les sommes des projections de ces forces sur deux axes qui se coupent soient nulles l'une et l'autre, et qu'il en soit de même de la somme de leurs moments autour d'un point quelconque du plan.*

Si les deux premières conditions d'équilibre sont remplies pour deux axes particuliers, elles le sont pour tout autre, et alors si la troisième l'est pour un seul point du plan, elle l'est pour tout autre. C'est exactement ce qui a lieu pour la fermeture des polygones funiculaires (§ 49).

Remarque. — Si le point O autour duquel on prend les mo-

Digitized by Google

ments d'un système de forces admettant une résultante est placé sur cette résultante même, le moment de celle-ci autour du point O est évidemment nul. Il en est donc de même de la somme des moments des forces données, et, inversement, si la somme des moments d'un système de forces non en équilibre est nulle pour un point particulier O, on peut être certain que ce système de forces admet une résultante (car, s'il se réduisait à un couple, la somme des moments des forces données ne saurait être nulle pour aucun point du plan placé à distance finie) et que le point O appartient à cette résultante.

CHAPITRE VIII.

COMPOSITION GRAPHIQUE DES FORCES PARALLÈLES DANS L'ESPACE. CENTRE DES FORCES PARALLÈLES.

§ 73.

Lemme. — Soient (*fig.* 25 et 25, *Pl. VII*) P et Q deux forces parallèles que nous supposerons appliquées en deux points quelconques a et b de leurs lignes d'action. La résultante de ces forces divise la ligne ab en raison inverse de leurs intensités; elle passe entre les points a et b, si les forces P et Q sont de même sens; elle coupe la ligne ab sur son prolongement et du côté de la plus grande des deux forces, si elles sont de sens contraires.

Ces propriétés qui se démontrent en Statique ordinaire, mais qu'il est utile de rappeler ici, se déduisent sans difficulté de la considération du polygone funiculaire.

Soient AB = P et BC = Q les côtés du polygone des deux forces P et Q. Si ces forces sont dirigées dans le même sens, BC devra être porté dans le prolongement de AB. Par le point B menons une parallèle BO à la ligne ab et construisons le polygone funiculaire aIb relatif à un pôle quelconque O pris sur cette droite. La résultante est une parallèle aux forces données, menée par le point I

où se coupent les côtés extrêmes de ce polygone; elle croise la ligne ab en c. Ce point est entre les points d'application a et b si les forces données sont de même sens; car alors les rayons OA et OC étant situés de part et d'autre du rayon OB parallèle à ab, il s'ensuit que les côtés aI et bI du polygone funiculaire se coupent entre les lignes d'action P et Q; si, au contraire, la force Q était dirigée en sens contraire de celle de P et qu'elle fût plus petite, elle serait représentée sur le polygone des forces par la ligne ascendante BC′, et le point C′ tomberait entre B et A. Donc le côté bI du polygone funiculaire serait remplacé par bI′ qui irait couper aI′ en un point I′ placé à gauche de P; la résultante couperait donc la ligne ab en un point C′ placé sur son prolongement et du côté de la force P supposée la plus grande.

En outre, les triangles semblables acI et ABO donnent

$$\frac{c\mathrm{I}}{ac} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{OB}},$$

d'où

$$\mathrm{P} \times ac = \mathrm{OB} \times c\mathrm{I}.$$

On aurait de même

$$\mathrm{Q} \times bc = \mathrm{OB} \times c\mathrm{I},$$

d'où

$$\mathrm{P} \times ac = \mathrm{Q} \times bc,$$

ou

$$(a) \qquad \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \frac{bc}{ac}.$$

La même chose aurait lieu pour le point I′; car les triangles semblables I′$c'a$ et OC′B donnent

$$\mathrm{P} \times ac' = \mathrm{OB} \times c'\mathrm{I}',$$

et

$$\mathrm{Q} \times bc' = \mathrm{OB} \times c'\mathrm{I}',$$

d'où

$$(a') \qquad \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \frac{bc'}{ac'}.$$

Cette propriété fournit un moyen graphique de construire la ré-

Digitized by Google

sultante de deux forces parallèles sans recourir au polygone des forces et au polygone funiculaire (*fig.* 45, *Pl. X*).

Du point d'application b de la force Q décrivez un arc de cercle avec un rayon bD proportionnel à P; du point d'application a de la force P décrivez de même un arc de cercle avec un rayon aD proportionnel à Q : 1° si les forces P et Q sont de même sens, menez la bissectrice de l'angle aDb, elle ira couper ab au point c de la résultante; 2° si les forces P et Q sont de sens contraires, c'est la bissectrice de l'angle aDb' supplémentaire du précédent qu'il faudra conduire pour avoir le point c' où la résultante cherchée coupe la ligne ab.

Remarque I. — La relation (a) ou (a') se déduirait immédiatement du théorème sur les moments; car, si p et q (*fig.* 25, *Pl. VII*) sont les distances des points d'application des forces P et Q au point c de la résultante, le théorème des moments appliqué à ce point donne

$$Pp - Qq = 0,$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p} = \frac{ac}{bc}.$$

Il y a deux points qui divisent la ligne ab dans le rapport de P à Q : l'un placé entre les points a et b, l'autre sur le prolongement de la ligne ab et du côté de la plus grande des forces P et Q.

Si les forces P et Q sont de même sens, il faut choisir le premier de ces points; dans le cas contraire, il faut choisir le second; car ce n'est qu'à cette condition que les forces P et Q feront tourner leurs bras de levier p et q en sens contraires, et auront des moments de signes contraires donnant une somme nulle.

Remarque II. — La position du point d'application c de la résultante des forces P et Q, ou du point d'application c' de la résultante des forces P et Q', ne dépend ni de la direction commune de ces forces, ni de leurs grandeurs absolues, mais seulement de la position de leurs points d'application a et b et du rapport de leurs grandeurs : le point c ou le point c' ne changerait donc pas si l'on modifiait les intensités de ces deux forces dans une même proportion et si on les faisait tourner d'un même angle quelconque autour

des points a et b, sans qu'elles cessent d'être parallèles. Ainsi, si l'on fait tourner deux forces parallèles d'un même angle α autour de leurs points d'application, sans qu'elles cessent d'être parallèles et sans que le rapport de leurs grandeurs soit modifié, leur résultante tourne elle-même autour d'un point fixe, dont la position est indépendante de l'angle α. Ce point est ce qu'on nomme le *centre* des deux forces parallèles appliquées en a et b.

§ 74.

CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. SA DÉTERMINATION GRAPHIQUE. — THÉORÈME. — *Étant donné un système de forces parallèles situées ou non dans un plan, si, sans changer soit les rapports de leurs grandeurs, soit leur parallélisme, on fait tourner chacune d'elles d'un même angle α autour d'un point fixe arbitrairement choisi sur sa ligne d'action, leur résultante ne fera elle-même que pivoter autour d'un point fixe, indépendant de l'angle α et dont la position dépend uniquement des positions des points ayant servi de pivots aux forces données et des rapports des grandeurs de ces forces.*

Ce point est le centre des forces parallèles.

Supposons le théorème démontré pour un système de i forces, je dis qu'il sera vrai pour $i+1$. En effet, soient Q la résultante des i premières forces données et R la résultante de Q et de la $(i+1)^{ème}$ que nous nommerons P_{i+1} : R sera ainsi la résultante de toutes les forces données.

Faisons tourner chacune de ces forces d'un même angle quelconque autour d'un point fixe, de façon qu'elles ne cessent pas d'être parallèles : par hypothèse, la résultante Q des i premières forces tournera du même angle autour d'un point fixe; mais alors la résultante de Q et de P_{i+1}, c'est-à-dire la résultante R de toutes les forces données, tournera elle-même autour d'un point fixe en vertu de la Remarque II du paragraphe précédent. Donc, si le théorème est vrai pour i forces, il est vrai pour $i+1$.

Étant établi pour deux forces, il est donc vrai pour trois, par suite pour quatre, et ainsi de suite pour un nombre quelconque.

Remarque I. — Lorsque les points fixes autour desquels pivotent

les diverses forces sont sur une ligne droite, le centre des forces parallèles se trouve aussi sur cette ligne.

Remarque II. — Lorsque les points d'application d'un système de forces parallèles distribuées d'une manière quelconque dans l'espace sont tous dans un même plan P, le centre des forces parallèles est lui-même dans ce plan.

Pour le démontrer, il suffit de supposer que toutes les forces aient tourné d'un même angle, de façon à venir se coucher dans le plan : leur résultante sera alors elle-même dans ce plan; il en est donc de même du centre des forces parallèles données qui est un point de cette résultante.

§ 75.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE GRAPHIQUE DES FORCES PARALLÈLES DANS L'ESPACE. — Cette remarque permet de ramener à un problème de Statique graphique plane la recherche du centre des forces parallèles dans l'espace et, par suite, aussi la recherche de la résultante des forces parallèles dans l'espace; car si on connait le centre d'un système de forces parallèles, la ligne d'action de leur résultante est connue puisqu'elle passe par ce centre et est parallèle aux forces données; la grandeur de la résultante égale à la somme des forces données et son sens sont directement fournis par le polygone des forces.

On pourra, par exemple, se donner les lignes d'action ainsi que le polygone des forces, en projection sur deux plans perpendiculaires. On déterminera les traces des diverses lignes d'action sur l'un des plans de projection; puis on amènera toutes les forces données dans ce plan en les faisant tourner d'un même angle autour de leurs traces. Le centre des forces ainsi déplacées sera un point de la résultante cherchée; la direction de cette résultante est celle des forces données; sa grandeur se trouve sur les deux projections du polygone des forces.

Si les forces ainsi ramenées dans un plan admettent une résultante unique, il en sera de même des forces données. Ceci exige, d'après ce qui précède (§ 49), que le polygone des forces ramenées dans un plan, lequel est identique à celui des forces données, ne soit pas fermé.

Si le polygone des forces données est fermé, alors ces forces se feront équilibre ou se réduiront à un couple, suivant que leur polygone funiculaire, après qu'elles auront été amenées dans un plan, sera fermé ou non.

CHAPITRE IX.

PROJECTIONS ET MOMENTS DES FORCES PARALLÈLES DANS L'ESPACE.

§ 76.

Nous allons indiquer ici, comme nous l'avons fait pour les forces situées dans un plan, comment la Statique ordinaire résout, à l'aide de la théorie des moments, le problème de la composition des forces parallèles dont nous venons de donner la solution graphique à l'aide des polygones funiculaires.

Lemme. — *La projection sur un plan de la résultante d'un système de forces parallèles coïncide avec la résultante des projections de ces forces sur le même plan.*

Soit un système de forces parallèles distribuées d'une manière quelconque dans l'espace

$$(1) \qquad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots, \quad P_n.$$

Concevons que les forces données soient représentées par des longueurs portées dans les sens voulus sur leurs lignes d'action respectives. Projetons ces longueurs sur un plan et soient

$$(2) \qquad P'_1, \quad P'_2, \quad P'_3, \ldots, \quad P'_n$$

leurs projections; nous pourrons considérer ces lignes comme de nouvelles forces. Soient R la résultante des forces données et R′ la résultante de leurs projections. Il s'agit de montrer que R′ est la projection de R. Pour cela, prolongeons les forces données jusqu'à

leurs rencontres avec le plan de projection et regardons-les comme appliquées en ces points; leurs projections formeront un nouveau système de forces parallèles appliquées aux mêmes points; les intensités des forces projetées sont proportionnelles à celles des forces données, le rapport des premières aux dernières étant le cosinus de l'angle aigu α que la direction de celles-ci fait avec le plan de projection; on peut donc faire coïncider les forces données avec leurs projections en faisant tourner les premières d'un même angle α autour de leurs points d'application et réduisant chacune d'elles dans le rapport $\cos\alpha : 1$. Dans ce mouvement, la résultante des forces données tournera (§ 74) du même angle autour de sa trace sur le plan de projection et sa grandeur sera réduite dans le rapport $\cos\alpha : 1$, c'est-à-dire qu'elle viendra coïncider avec sa projection. Cette projection est donc la résultante des forces projetées.

§ 77.

MOMENT D'UNE FORCE RELATIVEMENT A UN PLAN. — Dans l'étude des forces parallèles, on appelle *moment* d'une force par rapport à un plan le produit de cette force par la distance de son point d'application au plan.

On remarquera que le moment d'une force, relativement à un plan, a un tout autre caractère que le moment d'une force autour d'un point, que nous avons considéré dans l'étude des forces situées dans un plan. Celui-ci dépend essentiellement de la position de la ligne d'action de la force et nullement de celle de son point d'application; celui-là, au contraire, ne dépend que de la position du point d'application et non de la direction de la ligne d'action de la force.

D'après cela, étant donné un système de forces parallèles, faisons-les tourner d'un même angle autour de leurs points d'application, de façon à les rendre parallèles à une droite Oy arbitrairement tracée dans le plan (P) par rapport auquel on prend les moments; puis projetons-les sur un plan perpendiculaire à (P), mené par la droite Oy; enfin prenons les moments des forces projetées et de leur résultante autour d'un point quelconque O de Oy.

Le moment de l'une quelconque des forces données par rapport au plan (P) est évidemment, en valeur absolue, égal au moment de sa projection autour du point O; car les forces se projettent en

vraie grandeur et leurs distances au plan (P) sont égales aux distances de leurs projections au point O; convenons de prendre les signes des moments de nos forces relativement au plan (P), de façon que ces signes soient les mêmes que ceux des moments de leurs projections autour du point O, en sorte que ces deux moments seront, pour chaque force, égaux à la fois en grandeur et en signe.

Le moment autour du point O de la résultante des forces projetées est égal à la somme des moments de ces forces (§ 70). Cette dernière somme est, d'après ce qui précède, égale à la somme des moments des forces données relativement au plan (P); de plus, la résultante des forces projetées étant, d'après le lemme du paragraphe précédent, la projection de la résultante des forces de l'espace, son moment relatif au point O est égal au moment relatif au plan (P) de cette dernière résultante. Donc :

Théorème. — *Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles par rapport à un plan quelconque est égal à la somme des moments de ces forces par rapport à ce plan.*

DÉTERMINATION ANALYTIQUE DU CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. — D'après cela, soient

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots, \quad P_n$$

un système de forces parallèles.

Considérons trois plans se coupant deux à deux à angle droit, suivant des lignes Ox, Oy, Oz.

Soient

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & x_3, \ldots, & x_n, \\ y_1, & y_2, & y_3, \ldots, & y_n, \\ z_1, & z_2, & z_3, \ldots, & z_n, \end{array}$$

les distances respectives des points d'application des forces données aux trois plans yOz, zOx, xOy; et soient ξ, η, ζ les distances à ces mêmes plans du centre des forces parallèles. Si R est la résultante des forces données, le théorème des moments appliqué successivement aux trois plans, donnera les équations

$$(1) \quad \begin{cases} R\xi = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots + P_nx_n = \Sigma P_ix_i, \\ R\eta = P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \ldots + P_ny_n = \Sigma P_iy_i, \\ R\zeta = P_1z_1 + P_2z_2 + P_3z_3 + \ldots + P_nz_n = \Sigma P_iz_i, \end{cases}$$

en désignant par Σ les sommes algébriques qui forment les seconds membres de ces équations. Ces sommes sont connues ; R l'est également, puisque

$$(2) \qquad R = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \Sigma P_i,$$

où Σ est la somme algébrique des forces données. Donc les équations (1) font connaître les distances ξ, η, ζ du centre des forces parallèles aux trois plans donnés, c'est-à-dire la position de ce point dans l'espace. Ce procédé, au point de vue analytique, est très-simple ; au point de vue graphique, celui que nous avons donné au Chapitre précédent est en général infiniment meilleur.

Si toutes les forces sont situées dans un même plan, par exemple dans le plan xOy, alors $z_1 = 0$, $z_2 = 0, \ldots, z_n = 0$. La dernière équation (1) donne alors $\zeta = 0$, c'est-à-dire que le centre des forces parallèles est aussi situé dans ce plan, ce que nous savions (§ 74), et sa position est définie par ses distances ξ et η aux deux droites Oy et Ox, de même que les points d'application des forces données sont définis par leurs distances x_i et y_i à ces droites. Il résulte de là que les plans zOy et zOx perpendiculaires au plan xOy qui contient les forces données ne jouent plus aucun rôle, mais seulement leurs traces Oy et Ox sur ce plan. Voilà pourquoi le produit $P_i x_i$, moment de la force P_i relativement au plan zOy, peut, dans ce cas, prendre le nom de moment de la force P_i relativement à la *droite* Oy intersection du plan zOy avec le plan qui contient toutes les forces. De même le produit $P_i y_i$, moment de la force P_i relativement au plan zOx, prendra le nom de moment de cette force, relativement à la *droite* Ox.

En général, quand des forces parallèles sont toutes situées dans un plan, on appellera *moment* de l'une de ces forces par rapport à une droite du plan son moment par rapport à un plan mené par cette droite perpendiculairement à celui qui contient les forces. On peut donc énoncer le théorème suivant comme cas particulier de celui qui fait l'objet du paragraphe précédent : *Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles, contenues dans un plan, par rapport à une droite du plan, est égal à la somme des moments de ces forces par rapport à cette droite.*

Digitized by Google

§ 78.

ÉQUIVALENCE ENTRE LE ROLE ANALYTIQUE DES PROJECTIONS ET DES MOMENTS ET LE ROLE GRAPHIQUE DU POLYGONE DES FORCES ET DU POLYGONE FUNICULAIRE. — On voit que le théorème des moments permet de déterminer analytiquement la position du centre des forces parallèles, comme le polygone funiculaire permet de le déterminer graphiquement.

De même le théorème des projections tient analytiquement lieu du polygone des forces, lequel se réduit toujours à une ligne droite dans le cas des forces parallèles.

Pour qu'un système de forces parallèles soit en équilibre, il faut analytiquement : 1° que les sommes de ses projections, sur deux plans parallèles à ces forces et se coupant, soient nulles; 2° que les sommes de leurs moments relativement à ces plans soient nulles; et graphiquement : 1° que le polygone de ces forces soit fermé; 2° qu'un des polygones funiculaires de ces forces *ramenées dans un plan* (§ 75) soit également fermé.

CHAPITRE X.

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES CENTRES DE GRAVITÉ DES CORPS, SURFACES ET LIGNES.

§ 79.

POIDS ET CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS, D'UNE SURFACE, D'UNE LIGNE. — On nomme *pesanteur* ou *gravité* la cause qui sollicite les corps à descendre vers la terre lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes.

L'expérience prouve que cette cause se fait sentir sur toutes les molécules d'un corps. En un même lieu elle agit de la même manière sur toutes ces molécules, quelles qu'en soient les masses; car, dans le vide, un duvet et une balle de plomb tombent de la même hauteur avec la même vitesse.

Digitized by Google

La résultante des actions de la gravité sur toutes les molécules d'un corps est ce qu'on nomme le *poids* de ce corps.

La direction de la pesanteur, assez bien représentée par un fil à plomb, est ce qu'on nomme la *verticale;* tout plan ou toute ligne perpendiculaire à cette direction se nomme un *plan horizontal* ou une *ligne horizontale*.

Toutes les verticales issues des divers points d'un corps sont sensiblement parallèles, et nous les regarderons comme étant rigoureusement parallèles.

Le centre des forces parallèles qui agissent sur un corps en vertu de la pesanteur prend le nom de *centre de gravité* du corps. Ainsi (§ 74) le centre de gravité d'un corps est un point pris sur la ligne d'action de la force représentant le poids de ce corps, point tel qu'il ne changerait pas à l'intérieur du corps, si l'on imaginait qu'on fît tourner d'un même angle α toutes les forces verticales agissant en vertu de la pesanteur sur les différentes particules dont le corps se compose.

On ne peut pas à la vérité modifier ainsi la direction des forces de la pesanteur; mais on fait quelque chose d'équivalent en inclinant le corps lui-même d'un angle α, relativement à la verticale. Donc la propriété qui caractérise le centre des forces parallèles en général peut, quand il s'agit de la pesanteur, être exprimée ainsi : il existe à l'intérieur de chaque corps un point idéal par lequel passe constamment la résultante des actions que la pesanteur exerce sur ce corps, quelque position qu'on lui donne dans l'espace. Ce point se nomme le *centre de gravité* du corps.

Nous appellerons *densité* d'un corps homogène le poids de l'unité de volume de ce corps, ou, si l'on veut, le rapport du poids de ce corps à son volume.

Si, tout autour d'un point m d'un corps hétérogène, on conçoit une petite portion de ce corps, le rapport du poids de cette portion à son volume est sa densité moyenne; la limite vers laquelle tend ce rapport lorsque la portion considérée du corps décroît indéfiniment, sans cesser de passer par le point m, est ce qu'on nomme la *densité* du corps en ce point.

Nous considérerons aussi des surfaces et des lignes pesantes, en admettant que la gravité s'exerce sur les surfaces homogènes en raison de leur étendue, et sur les lignes homogènes en raison de

Digitized by Google

leur longueur. La densité d'une figure homogène est donc le poids d'une portion de cette figure ayant une aire égale à l'unité de surface; la densité d'une ligne homogène, le poids d'une portion de cette ligne égale à l'unité de longueur.

De là on passe, comme nous venons de le faire pour les volumes, à la définition de la densité en chaque point d'une ligne ou d'une surface hétérogène.

§ 80.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LA DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES CENTRES DE GRAVITÉ. — Le centre de gravité n'étant autre chose que le centre des forces parallèles dues à la gravité, la méthode générale indiquée au § 75 pour la recherche graphique du centre des forces parallèles s'applique à la recherche des centres de gravité. Toutefois, dans cette dernière recherche, on a affaire non plus à un nombre limité de forces dont on connaît le polygone des forces et dont il est aisé de construire les polygones funiculaires, mais aux forces en nombre illimité que la gravité exerce sur les diverses particules des lignes, des surfaces ou des corps. Le premier objet que l'on se propose en général dans la recherche graphique des centres de gravité, c'est de substituer, aux actions de la pesanteur, un nombre *fini* de forces parallèles qui leur soient équivalentes; il ne reste ensuite qu'à déterminer le centre de ces dernières forces.

On peut appliquer cette méthode toutes les fois que la figure dont on cherche le centre de gravité peut être décomposée en un nombre fini d'autres figures plus simples et dont on sait trouver les centres de gravité; car alors il suffit de concevoir qu'aux centres de gravité des figures composantes soient appliquées des forces parallèles et proportionnelles aux poids de ces figures, et de chercher le centre de ces forces parallèles.

Ainsi, par exemple, si l'on sait trouver le centre de gravité d'un tétraèdre, on sait trouver le centre de gravité d'un polyèdre quelconque, tout polyèdre étant décomposable en tétraèdres; de même, si l'on sait trouver le centre de gravité d'un triangle, on peut trouver le centre de gravité d'un polygone à un nombre quelconque de côtés, et ainsi de suite.

Il y a deux cas à considérer :

1° Supposons qu'un volume A (*et ce que nous disons des vo-*

lumes s'applique aussi bien aux lignes et aux surfaces) soit la somme d'autres volumes A_1, A_2,..., A_n, de telle façon que

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n.$$

Si, aux centres de gravité des figures dont les volumes sont A_1, A_2, A_3,..., on applique des forces proportionnelles à ces volumes, parallèles, de même sens et de direction d'ailleurs quelconque, le centre de ces forces parallèles sera le centre de gravité du volume A.

2° Si le volume

$$A = A_1 - A_2,$$

alors, pour avoir le centre de gravité de ce volume, on devra, aux centres de gravité des corps dont les volumes sont A_1 et A_2, appliquer des forces proportionnelles à A_1 et A_2, parallèles, de direction quelconque, *mais de sens contraires*. Car, de ce que A est la différence entre A_1 et A_2, on déduit que A_1 est la somme de A et de A_2; donc le centre de gravité du volume A_1 est le point d'application de la résultante de deux forces parallèles et de même sens appliquées aux centres de gravité des corps dont les volumes sont A et A_2, et proportionnelles à ces volumes.

Appelons, pour abréger, A, A_1, A_2 les intensités de forces parallèles et de même sens appliquées aux centres de gravité des volumes A, A_1, A_2 et proportionnelles à ces volumes. La force A_1 étant la résultante des forces A et A_2, les trois forces A_1, $-A$ et $-A_2$ se font équilibre : donc chacune d'elles est égale et opposée à la résultante des deux autres; en particulier $-A$ est égal et opposé à la résultante de A_1 et $-A_2$, c'est-à-dire que A est la résultante de ces dernières forces.

De là on déduit généralement que si le volume A est

$$A = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 \pm \ldots \pm A_n,$$

de telle façon qu'il soit formé de volumes dont les uns sont à ajouter entre eux, les autres à retrancher, pour trouver le centre de gravité du volume A, on devra, aux centres de gravité des volumes A_1, A_2, A_3,..., appliquer des forces proportionnelles à ces volumes, parallèles, mais en ayant soin de diriger dans un *même sens* toutes celles qui se rapportent aux volumes à ajouter et dans le *sens contraire* toutes celles qui se rapportent aux volumes à soustraire.

Digitized by Google

Le centre de ces forces parallèles sera le centre de gravité cherché.

Nous allons maintenant indiquer le moyen de trouver les centres de gravité des figures les plus simples, auxquelles on ramènera ensuite soit exactement, soit approximativement toutes les autres.

Nous ne considérerons d'ailleurs que des figures homogènes.

§ 81.

Lemme. — *Lorsqu'une figure est divisée par un plan en deux parties parfaitement symétriques, ce plan contient le centre de gravité de la figure;* car il n'y a pas de raison pour que le centre de gravité se trouve plutôt d'un côté de ce plan que de l'autre.

Si une figure contient deux plans de symétrie, son centre de gravité est sur leur ligne d'intersection; si elle en contient trois, le centre de gravité est en leur point de rencontre.

Ainsi le centre de gravité d'un parallélépipède rectangle coïncidera avec son centre de figure par lequel passent évidemment trois plans de symétrie.

Si, dans une figure plane, tout est symétrique de part et d'autre d'une droite, le centre de gravité est sur cette droite.

Si une figure plane contient deux lignes de symétrie, son centre de gravité est en leur point de rencontre. C'est ainsi que le centre de gravité d'un rectangle coïncide avec son centre de figure.

Centre de gravité des lignes.

§ 82.

APPLICATION DE LA MÉTHODE GÉNÉRALE A LA RECHERCHE DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CONTOUR POLYGONAL OU CURVILIGNE QUELCONQUE. — Le centre de gravité d'une portion de ligne droite est sur cette ligne (§ 74, *Remarque I*).

Si la ligne droite est homogène, il est évidemment en son milieu, car il n'y a pas de raison pour qu'il tombe plutôt d'un côté de ce milieu que de l'autre.

Le poids d'une telle ligne est d'ailleurs proportionnel à sa longueur.

Étant donné un contour polygonal, si, au milieu de chacun de ses côtés, on suppose appliquée une force proportionnelle à la longueur de ce côté, toutes ces forces étant parallèles et de même sens, et qu'on les compose au moyen de la règle du polygone des forces et du polygone funiculaire, on aura la ligne d'action de leur résultante. Si on les compose une seconde fois, après les avoir toutes inclinées dans le même sens d'un angle quelconque, on aura la ligne d'action de la résultante parallèle à cette nouvelle direction. L'intersection des deux lignes d'action ainsi obtenues est le centre de gravité cherché.

Pour trouver le centre de gravité du périmètre d'une courbe irrégulière, on y substituera le périmètre d'un polygone inscrit d'un grand nombre de côtés.

§ 83.

Triangle. — S'il s'agit d'un triangle ABC (*fig.* 46, *Pl. X*), en joignant les milieux de ses côtés, on obtient un second triangle *abc* semblable au premier. En *b* on doit supposer appliquée une force proportionnelle à AC ou à $ac = \frac{AC}{2}$; en *c* une force proportionnelle à AB ou à $ab = \frac{AB}{2}$; enfin en *a* une force proportionnelle à $bc = \frac{BC}{2}$.

Le centre des deux forces parallèles appliquées en *b* et *c* est le point d'intersection de *bc*, avec la bissectrice de l'angle *a* (§ 73); donc le centre de gravité cherché est sur cette bissectrice. Par la même raison, il est sur les bissectrices des angles *b* et *c*. Ainsi : *le centre de gravité d'un triangle coïncide avec le centre du cercle inscrit dans le triangle qui joint les milieux de ses côtés.*

§ 84.

Portion de polygone régulier. — Soit (*fig.* 50, *Pl. X*) AIB une portion de polygone régulier. La ligne OY, perpendiculaire sur le milieu de la corde AB qui sous-tend cette portion de polygone, est

une ligne de symétrie; le centre de gravité cherché se trouve donc sur cette ligne (§ 81). Pour avoir sa position, il faut concevoir qu'au milieu i de chaque côté du polygone soit appliquée une force proportionnelle à la longueur ab de ce côté, toutes ces forces ayant même direction et même sens; le centre de ces forces parallèles sera le centre de gravité cherché. Soit G ce point. Appliquons le théorème des moments des forces parallèles (§ 77) à un axe XX′ parallèle à la corde AB et passant par le centre O du polygone régulier dont le contour AIB fait partie. La résultante de toutes les forces parallèles est égale à leur somme, c'est-à-dire au périmètre AIB. Soit L ce périmètre. Le moment de cette résultante est $L \times OG$. Le moment de la composante appliqué en i est $ab \times ij = l \times y$, en appelant l la longueur du côté ab et y la distance ij. Le théorème des moments donnera donc

$$L \times OG = \Sigma(l \times y),$$

le signe Σ indiquant une somme qui s'étend à tous les côtés du polygone donné.

Or, si on mène la ligne aa' parallèle à OY et ba' parallèle à XX′, les triangles semblables Oij et $aa'b$ donneront

$$\frac{a'b}{ab} = \frac{ij}{Oi},$$

ou, en appelant l' la projection de ab sur XX′ et r le rayon Oi du cercle inscrit dans le polygone donné,

$$\frac{l'}{l} = \frac{y}{r},$$

d'où

$$l \times y = l' \times r;$$

donc

$$L \times OG = \Sigma(l' \times r);$$

et comme le facteur r est le même dans tous les termes de la somme Σ, on peut le faire sortir du signe Σ et écrire

$$L \times OG = r\Sigma l' = r \times A'B' = r \times AB$$

ou

$$OG = \frac{r \times AB}{L},$$

expression facile à construire. Il suffit de construire un triangle

rectangle B'MM' dont la hauteur MM' soit égale à r et dont l'hypoténuse B'M' soit égale à la longueur L du contour donné. Si l'on porte sur cette hypoténuse $B'c = AB$, le centre de gravité cherché G se trouvera sur une parallèle à XX' menée par c; car, si l'on abaisse cc' perpendiculaire sur XX',

$$\frac{cc'}{MM'} = \frac{A'c}{A'M'},$$

ou

$$\frac{cc'}{r} = \frac{AB}{L},$$

d'où

$$cc' = \frac{AB \times r}{L} = OG.$$

§ 85.

Arc de cercle. — La construction précédente étant applicable, quelque petits que soient les côtés du polygone régulier, elle s'appliquera encore à la limite, lorsque ce polygone se confondra avec un arc de cercle.

Si donc (*fig.* 48, *Pl. X*) G est le centre de gravité de l'arc de cercle AIB, de longueur L et de rayon r, on aura

$$OG \times L = r \times AB,$$

d'où

$$OG = \frac{r \times AB}{L}.$$

On peut construire le point G soit par le procédé indiqué ci-dessus, soit par celui qui suit : sur la tangente au milieu I de l'arc, portons une longueur IB' égale au demi-arc IB rectifié. Joignons le point B' au point O; en B, menons une perpendiculaire à AB jusqu'à sa rencontre en C avec OB'; enfin de C abaissons une perpendiculaire CG sur le rayon OI. Le point G sera le centre de gravité cherché; car

$$\frac{OG}{OI} = \frac{CG}{IB'},$$

ou

$$\frac{OG}{r} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}L} = \frac{AB}{L},$$

d'où

$$OG = \frac{r \times AB}{L}.$$

Centre de gravité des aires planes.

§ 86.

On appelle *diamètre* d'une ligne plane le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée.

Quand un diamètre est rectiligne, sa direction et celle des cordes qu'il divise en parties égales sont dites *conjuguées*.

Théorème. — *Lorsqu'une courbe plane fermée admet un diamètre rectiligne, le centre de gravité de l'aire de cette courbe se trouve sur ce diamètre.*

Soit (*fig.* 49, *Pl. X*) xy une droite, lieu des milieux des cordes ac parallèles à une direction fixe.

Traçons une série de cordes telles que ac, parallèles à cette direction et très-voisines les unes des autres. Par les extrémités a et c de chacune d'elles, abaissons des perpendiculaires ab et cd sur la corde voisine $a'c'$; nous formerons ainsi une série de rectangles tels que $abcd$.

La figure formée par l'ensemble de ces rectangles est d'autant moins différente de la figure donnée que les cordes ac, $a'c'$,... sont plus voisines, et, si elles se rapprochent indéfiniment, la somme des aires des rectangles se rapprochera indéfiniment de l'aire de la figure donnée. Or chacun de ces rectangles (§ 81) a son centre de gravité sur le diamètre xy. Donc (§ 74, *Remarque I*), le centre de gravité de la figure formée par l'ensemble des rectangles est sur la même ligne. Comme il en est ainsi quelque voisines que soient les cordes ac, $a'c'$, cette propriété appartiendra aussi à l'aire donnée, vers laquelle tend indéfiniment celle formée par l'ensemble des bandes rectangulaires.

§ 87.

Centre de gravité de l'aire d'un parallélogramme. — Il résulte de là immédiatement que le centre de gravité de l'aire d'un parallélogramme EFGH (*fig.* 47, *Pl. X*) est son centre de figure; car les deux diamètres AB et CD parallèles aux côtés du parallé-

logramme et passant par son centre devant tous deux contenir le centre de gravité cherché, il est leur point d'intersection.

§ 88.

Centre de gravité de l'aire du triangle. — Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est au point d'intersection de ses trois médianes, c'est-à-dire au tiers de chacune d'elles. Chaque médiane, en effet, est un diamètre, puisqu'elle divise en parties égales les cordes parallèles au côté du triangle au milieu duquel elle aboutit.

§ 89.

APPLICATION DE LA MÉTHODE GÉNÉRALE A LA RECHERCHE DU CENTRE DE GRAVITÉ DE L'AIRE D'UN POLYGONE OU D'UNE COURBE QUELCONQUE. — Pour appliquer au centre de gravité des aires planes la méthode du § 80, s'il s'agit de l'aire d'un polygone, on le décomposera en triangles. Au centre de gravité de chaque triangle, on supposera appliquée une force proportionnelle à son aire, toutes ces forces étant parallèles; elles devront d'ailleurs toutes avoir même sens ou des sens différents, suivant que l'aire du polygone sera composée de la somme arithmétique ou de la somme algébrique des aires des triangles. Si tous les triangles sont à additionner, toutes les forces appliquées en leurs centres de gravité devront avoir même sens; si quelques-uns sont à additionner et d'autres à retrancher, ce qui peut arriver notamment dans les polygones présentant des angles rentrants, les forces appliquées aux centres de gravité de ces derniers devront avoir un sens contraire à celui des autres.

§ 90.

Quadrilatère. — Appliquons cette règle à un quadrilatère quelconque ABCD (*fig.* 54, *Pl. XI*). On mènera la diagonale CD. On joindra les sommets opposés A et B au milieu I de cette diagonale.

Les points g et g' placés au tiers des lignes IA et IB, à partir de I, sont les centres de gravité des triangles ACD et BCD. On devra y appliquer des forces proportionnelles aux aires de ces triangles, c'est-à-dire à leurs hauteurs Aa et Bb, puisqu'ils ont même base CD.

Ces hauteurs sont d'ailleurs proportionnelles aux segments AO et OB de la diagonale AB, ou, si l'on veut, aux segments gi et ig' qui sont les tiers des précédents. Donc, pour avoir le centre de gravité cherché, on devra (§ 73) diviser la ligne gg' en parties inversement proportionnelles à gi et ig'. Pour cela, il suffira de prendre, à partir du point g, une longueur $gG = g'i$; le point G est le centre de gravité cherché.

§ 91.

Trapèze. — Dans le cas du trapèze, la construction précédente peut être un peu simplifiée. Soit (*fig.* 55, *Pl. XI*) un trapèze ABCD. Divisons-le en deux triangles ACD et ABD par la diagonale AD. Menons la médiane DE du triangle ADB; le centre de gravité G_1 de ce triangle sera au tiers de DE à partir de E. De même le centre de gravité G_2 du triangle ACD sera au tiers de la médiane FA à partir de F. Le centre de gravité du trapèze sera donc sur la ligne G_1G_2; mais la ligne EF est une ligne diamétrale du trapèze : donc (§ 86) le centre de gravité cherché sera sur cette ligne; il se trouvera donc au point d'intersection G des lignes G_1G_2 et EF.

De là on peut déduire une autre manière de trouver ce point : prolongez CD d'une longueur DK égale à AB, et BA d'une longueur AH égale à CD; puis menez la ligne HK; cette ligne passera par le point G. En effet, menons les lignes G_1I_1 et G_2I_2 parallèles aux bases du trapèze. Puisque G_1 est au tiers de ED, le point I_1 sera au tiers de EF; de même le point I_2 sera au tiers de FE, en sorte que

$$I_1E = I_2F = \tfrac{1}{3}EF,$$

et par suite

$$(b) \qquad I_1E = I_2F = I_1I_2.$$

D'un autre côté, les triangles semblables GG_1I_1, GG_2I_2 donnent

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{GI_1}{GI_2} = \frac{G_1I_1}{G_2I_2} = \frac{CD}{AB},$$

d'où, d'après les propriétés connues des fractions,

$$\frac{GI_1 + \frac{1}{2}GI_2}{GI_2 + \frac{1}{2}GI_1} = \frac{CD + \frac{1}{2}AB}{AB + \frac{1}{2}CD} = \frac{HE}{KF},$$

ou

$$\frac{2GI_1 + GI_2}{2GI_2 + GI_1} = \frac{HE}{KF}.$$

Or, d'après les relations (b), on a

$$2GI_1 + GI_2 = GE,$$
$$2GI_2 + GI_1 = GF,$$

d'où

$$\frac{GE}{GF} = \frac{HE}{KF},$$

ce qui montre que la ligne KH passe bien par le centre de gravité cherché G.

§ 92.

Secteur formé par une portion de polygone régulier et secteur de cercle. — Soit ABCDE (*fig.* 53, *Pl. XI*) une portion de polygone régulier ayant son centre en O; cherchons le centre de gravité du secteur OABCDE. Pour cela, décomposons-le en triangles ayant leur sommet en O. Le centre de gravité du triangle OBC, par exemple, est en i, aux deux tiers de la médiane OI. Si on construit la portion de polygone régulier *abcde* dont les sommets sont aux deux tiers des rayons aboutissant aux sommets A, B, C,..., le centre de gravité de chaque triangle OBC sera au milieu du côté correspondant *bc* du contour *abcde;* comme d'ailleurs l'aire de ce triangle est proportionnelle à la longueur *bc*, on voit qu'on obtiendra le centre de gravité cherché en appliquant au milieu i de chacun des côtés du contour *abcde* une force proportionnelle à ce côté, toutes ces forces ayant même direction et même sens. Cela revient à dire que *le centre de gravité du secteur* OABCDE *coïncide avec le centre de gravité du périmètre abcde.*

Ce dernier, nous savons le trouver (§ 84).

Le résultat auquel nous venons d'arriver subsistant, quelque nombreux que soient les côtés du polygone ABCDE inscrit dans l'arc de cercle AE, subsistera pour cet arc lui-même. Donc : *le centre de gravité de l'aire d'un secteur de cercle coïncide avec le centre de gravité de l'arc, ayant pour rayon les deux tiers du rayon de ce secteur.*

Digitized by Google

§ 93.

Segment de cercle. — Soit (*fig.* 51, *Pl. XI*) le segment de cercle ABC; son centre de gravité est sur la ligne de symétrie OC.

Soient G_2 et Q_2 le centre de gravité et la surface du secteur OACB; G_1 et Q_1 le centre de gravité et la surface du triangle OAB. Nous savons trouver les points G_1 et G_2. Soient G le centre de gravité du segment et Q sa surface. On a

$$Q = Q_2 - Q_1.$$

Donc (§ 80) le centre de gravité G est le centre de deux forces parallèles, proportionnelles à Q_1 et Q_2 et de sens contraires; par suite, le point G sera sur le prolongement de G_1G_2 et dans une situation telle que

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{DH}{\text{arc CB}},$$

DH étant la perpendiculaire abaissée du milieu D de la corde AB sur le rayon OB.

Donc si, sur une ligne quelconque issue de G_1, on porte

$$G_1u_1 = \text{arc CB},$$

et, sur une parallèle à G_1u_1 issue de G_2, une longueur

$$G_2u_2 = DH,$$

la ligne u_1u_2 rencontrera OC au centre de gravité cherché G.

§ 94.

Anneau compris entre deux arcs de cercles concentriques. — Soit (*fig.* 52, *Pl. XI*) à chercher le centre de gravité de l'anneau ABCD compris entre les arcs de cercle concentriques AB et CD. Il se trouve évidemment (§ 85) sur le rayon OI passant par le milieu des arcs AB et CD, puisque ce rayon est une ligne de symétrie. Soient G_1 et G_2 les centres de gravité des secteurs OAB et OCD,

Digitized by Google

et G le centre de gravité cherché de l'anneau ABCD. Nous savons trouver les points G_1 et G_2.

On a ABCD = sect. OAB — sect. OCD. Donc on peut regarder le centre de gravité cherché comme étant sur la ligne d'action de la résultante de deux forces parallèles et de *sens contraires*, l'une proportionnelle à l'aire du secteur OAB appliquée en son centre de gravité G_1, l'autre proportionnelle à l'aire du secteur OCD appliquée en son centre de gravité G_2. Donc

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{\text{sect. OCD}}{\text{sect. OAB}} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{OA}^2}.$$

Joignons le point A au point J et menons Ci parallèle à AJ; on aura

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OJ}{O\,i} = \frac{OC}{O\,i},$$

d'où

$$\overline{OC}^2 = OA \times O\,i$$

et par suite

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{OA \times O\,i}{\overline{OA}^2} = \frac{O\,i}{OA}.$$

Du point G, sur une ligne quelconque, portons $G_1 u_1 = O\,i$, et du point G_2, sur une parallèle à $G_1 u_1$, portons $G_2 u_2 = OA$. Joignons les points u_2 et u_1; la droite ainsi obtenue passera évidemment par le point cherché G.

§ 95.

Segment de parabole. — Soit (*fig.* 57, *Pl. XI*) un segment de parabole AIB. Son centre de gravité se trouve sur le diamètre IX, conjugué à la corde AB (§ 86). Soit G ce point.

Rapportons la parabole au diamètre IX et à la tangente conjuguée IY, et soit

$$y^2 = 2px$$

son équation.

Prenons une zone $\alpha\beta\alpha'\beta'$ ayant une épaisseur dx comptée parallèlement à IX. Soit x l'abscisse de la ligne $\alpha\beta$. On aura

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2px}.$$

L'aire AIB sera proportionnelle à

$$2\int dx\sqrt{2px},$$

son moment relatif à IY proportionnel à

$$\mathrm{GI}\times 2\int dx\sqrt{2px}.$$

Le moment de la zone $\alpha\beta\alpha'\beta'$ sera proportionnel à

$$x\times dx\times 2\sqrt{2px}=2x\,dx\sqrt{2px}.$$

Donc le théorème des moments donnera

$$\mathrm{GI}\times 2\int dx\sqrt{2px}=\int 2x\,dx\sqrt{2px};$$

ou, en supprimant le facteur commun $2\sqrt{2p}$,

$$\mathrm{GI}=\frac{\int x^{\frac{3}{2}}dx}{\int x^{\frac{1}{2}}dx},$$

les intégrales étant à prendre de I à C, ce qui donne

$$\mathrm{GI}=\frac{3}{5}\,\mathrm{IC}.$$

Centre de gravité des surfaces courbes ou polyédrales.

§ 96.

APPLICATION DE LA MÉTHODE GÉNÉRALE A LA RECHERCHE DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE SURFACE COURBE OU POLYÉDRALE. — Nous savons, par ce qui précède, trouver le centre de gravité de chacune des faces planes d'un polyèdre. Si, en ces centres de gravité, on suppose appliquées des forces parallèles et de même sens, proportionnelles aux aires de ces faces, le centre de ces forces parallèles que l'on sait trouver graphiquement (§ 74) sera le centre de gravité cherché.

Si l'on a à chercher le centre de gravité d'une surface courbe plus ou moins irrégulière, on y substituera la surface d'un polyèdre inscrit d'un grand nombre de faces et l'on procédera comme il vient d'être dit.

Appliquons cette marche à quelques exemples.

§ 97.

Surface latérale d'une pyramide ou d'un cône. — *Le centre de gravité de la surface latérale d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution coïncide avec le centre de la section faite dans la pyramide ou le cône, parallèlement à sa base et au tiers de sa hauteur à partir de cette base.*

En effet, la surface latérale d'une pyramide se compose de triangles : pour avoir son centre de gravité, on devra, aux centres de gravité de ces triangles, appliquer des forces parallèles, proportionnelles à leurs aires et chercher le centre de ces forces parallèles ; mais le centre de gravité de chacun de ces triangles est (§ 88) au milieu de la ligne d'intersection que détermine dans ce triangle un plan sécant parallèle à la base de la pyramide et placé au tiers de sa hauteur : le centre de gravité de la pyramide est donc dans ce plan ; il est d'ailleurs évidemment sur la ligne qui joint le sommet de la pyramide au centre de sa base, laquelle ligne passe par les centres de toutes les sections parallèles à la base.

Cela étant vrai pour une pyramide à un nombre quelconque de faces, inscrite dans un cône de révolution, est encore vrai pour le cône lui-même.

§ 98.

Centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de pyramide ou de cône à bases parallèles. — *Le centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de pyramide régulier ou de cône à bases parallèles coïncide avec le centre de gravité du périmètre d'une section parallèle aux bases et distante de la base inférieure d'une fraction de la hauteur du tronc, représentée par* $\frac{p+2p'}{3(p+p')}$, *p étant le périmètre de la base inférieure, et p' celui de la base supérieure.*

En effet, la surface latérale d'un tronc de pyramide se compose de trapèzes. Aux centres de gravité des aires de ces trapèzes, on devra appliquer des forces qui leur sont proportionnelles et chercher le centre de ces forces parallèles et de même sens. Soient (*fig.* 56, *Pl. XI*) $BB' = b$ et $AA' = a$ les deux bases parallèles de l'un de ces trapèzes, b étant un côté de la base inférieure et a un côté de la base supérieure du tronc ; le centre de gravité G de ce

trapèze se trouve au milieu d'une parallèle DD′ à sa base, divisant (§ 91) sa hauteur ou ses côtés non parallèles en parties, qui sont dans le rapport

$$2a + b : 2b + a,$$

en sorte que

$$\frac{D'B'}{D'A'} = \frac{2a + b}{2b + a},$$

ou

$$\frac{D'B'}{A'B'} = \frac{2a + b}{3(a + b)} = \frac{2p' + p}{3(p + p')}.$$

Mais de même le centre de gravité G′ du trapèze, formant la face A′B′A″B″, contiguë à la précédente, dont les bases parallèles sont A′A″ et B′B″, sera au milieu d'une ligne parallèle aux bases et issue d'un point D″, tel que

$$\frac{D''B''}{A''B''} = \frac{2p' + p}{3(p + p')}.$$

Cela montre que, si l'on imagine une section parallèle aux bases et distante de la base inférieure d'une fraction $\frac{p + 2p'}{3(p + p')}$ de la hauteur du tronc, les centres de gravité des faces de la pyramide sont aux milieux des côtés du polygone d'intersection de ce plan avec la surface latérale du tronc : le centre de gravité cherché se trouve donc dans ce plan ; il est d'ailleurs évidemment sur la ligne qui joint les centres des bases de la pyramide, laquelle est une ligne de symétrie qui passe par les centres de toutes les sections parallèles aux bases.

Cela étant vrai pour une pyramide à un nombre quelconque de faces inscrite dans un tronc de cône l'est encore pour un tel tronc.

Dans le cas du tronc de cône, on a

$$\frac{p + 2p'}{3(p + p')} = \frac{d + 2d'}{3(d + d')},$$

en appelant d et d' les diamètres des cercles des bases.

Remarque. — Si le tronc de pyramide ou de cône se change en un tronc de prisme ou de cylindre, c'est-à-dire si $p = p'$, alors le rapport

$$\frac{p + 2p'}{3(p + p')} = \frac{3p}{3 \times 2p} = \frac{1}{2},$$

ce qui doit être ; car il est facile de voir d'une manière générale que *le centre de gravité de la surface latérale d'un prisme ou d'un cylindre, droit ou oblique, à bases parallèles coïncide avec le centre de gravité du périmètre de la section passant au milieu de sa hauteur.*

§ 99.

Calotte sphérique et zone sphérique. — *Le centre de gravité d'une zone sphérique se trouve au milieu de la ligne qui joint les centres de ses bases.*

Il se trouve évidemment sur cette ligne qui est une ligne de symétrie, et si l'on imagine la zone divisée par des plans équidistants et parallèles à ses bases, toutes ces zones ont même surface ; d'où l'on conclut immédiatement le théorème énoncé.

S'il s'agit d'une calotte, c'est-à-dire d'une zone dont une base est nulle, son centre de gravité est au milieu de sa hauteur.

Centre de gravité des corps.

§ 100.

Théorème. — *S'il existe, à l'intérieur d'un corps, une ligne droite telle qu'une série de sections parallèles à un plan fixe faites dans ce corps aient les centres de gravité de leurs aires sur cette ligne, le centre de gravité du volume du corps s'y trouvera également.*

En effet, soit (*fig.* 49, *Pl. X*) xy une ligne contenant les centres de gravité des aires des sections faites dans un corps, parallèlement à un plan fixe. Menons une série de ces sections telles que ac, $a'c'$,... très-voisines les unes des autres, et par les points du contour de chacune abaissons des perpendiculaires sur la section voisine : nous formerons ainsi une série de cylindres droits tels que $aca'c'$; le corps formé par ces cylindres juxtaposés sera d'autant moins différent de celui que nous considérons que les sections ac, $a'c'$,... seront plus voisines les unes des autres. Or le centre de gravité du volume de chacun des cylindres droits $aca'c'$ est au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des surfaces de ses bases, c'est-à-dire sur la ligne xy ; cela résulte de

l'idée même qu'on se fait du centre de gravité d'une surface plane. Donc le centre de gravité du corps formé par l'ensemble des cylindres est aussi sur la ligne xy, et, comme on peut rendre ce corps aussi peu différent qu'on le veut de celui que l'on considère en menant les sections $ac, a'c', \ldots$ suffisamment voisines les unes des autres, il s'ensuit que le centre de gravité de ce dernier corps est moins éloigné de xy qu'une quantité appréciable si petite qu'elle soit ; cela veut dire qu'il est rigoureusement sur cette ligne.

Remarque. — S'il existe une seconde ligne droite, lieu des centres de gravité d'une série de sections parallèles, elle contient aussi le centre de gravité du corps. D'où ce théorème de Géométrie : *Si à l'intérieur d'une surface il existe plusieurs lignes droites dont chacune soit le lieu des centres de gravité des aires d'une série de sections parallèles faites dans ce corps, toutes ces lignes se coupent nécessairement en un même point.*

§ 101.

Centre de gravité d'un tétraèdre. — *Le centre de gravité d'un tétraèdre est sur la ligne qui joint un quelconque de ses sommets au centre de gravité de la face opposée, et au quart de cette ligne à partir de cette face.*

Soit (*fig.* 58, *Pl. XI*) le tétraèdre ABCD. Joignons le sommet A au centre de gravité g de la face opposée BCD. La ligne Ag est évidemment le lieu des centres de gravité des aires des sections parallèles à BCD, faites dans le tétraèdre. Donc (§ 100) elle contient le centre de gravité de celui-ci. Par la même raison, ce centre de gravité G se trouve sur la ligne Cg' joignant tout autre sommet C du tétraèdre au centre de gravité g' de la face opposée. D'où l'on conclut ce théorème de Géométrie :

Les quatre lignes qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux centres de gravité des faces opposées se coupent en un même point.

C'est ce qu'il est facile de voir géométriquement, et alors on reconnaît, en outre, que le point de rencontre G des quatre lignes dont il s'agit est au quart de chacune d'elles à partir de la face à laquelle elle aboutit. Soit, en effet, I le milieu de l'arête BD du

tétraèdre ; joignons le point I aux deux sommets C et A. Le centre de gravité g du triangle BCD est au tiers de la médiane CI à partir du point I ; le centre de gravité g' du triangle BDA est au tiers de la médiane AI à partir du même point I. Donc les deux lignes Ag et Cg' sont dans un même plan AIC et se coupent en un point G ; de plus, puisque

$$\frac{Ig}{gC} = \frac{Ig'}{g'A} = \frac{1}{3},$$

la ligne gg' est parallèle à l'arête AC, et les deux triangles semblables gg'G et ACG donnent

$$\frac{gG}{GA} = \frac{gg'}{AC} = \frac{Ig}{IC} = \frac{1}{3},$$

d'où

$$\frac{gG}{gA} = \frac{1}{4},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire I. — Le centre de gravité d'un tétraèdre est le centre des moyennes distances de ses quatre sommets, c'est-à-dire que sa distance à un plan quelconque est la moyenne arithmétique entre les distances de ses sommets au même plan. En effet, le poids du tétraèdre appliqué en G peut être décomposé en deux forces parallèles et de même sens, l'une appliquée en A et l'autre en g ; et comme $Gg = \frac{1}{3}AG$, si la composante passant en A est Q, celle passant en g sera (§ 73) 3Q ; mais celle-ci peut à son tour être décomposée en deux forces appliquées l'une en C, l'autre en I, et, comme $Ig = \frac{1}{2}gC$, la force appliquée en I sera double de celle appliquée en C, c'est-à-dire que celle-ci sera Q et celle appliquée en I sera 2Q et pourra être remplacée par deux forces égales chacune à Q, appliquées en B et D. Donc le poids du tétraèdre se trouvera décomposé en quatre poids Q égaux entre eux, appliqués en ses sommets.

Soient a, b, c, d les distances de ces sommets à un plan quelconque, et ξ la distance au même plan du point G ; le théorème des moments appliqué aux poids 4Q du tétraèdre donne

$$4Q\xi = Qa + Qb + Qc + Qd$$

ou

$$\xi = \frac{1}{4}(a + b + c + d).$$

Digitized by Google

Corollaire II.— De la démonstration qui précède, il résulte aussi que le centre de gravité d'un triangle est le centre des moyennes distances de ses trois sommets.

Corollaire III. — Le centre de gravité d'un tétraèdre coïncide avec le centre de gravité de l'aire du triangle que détermine, dans le tétraèdre, une section distante d'une de ses faces du quart de la hauteur correspondante.

Corollaire IV. — Le centre de gravité d'un tétraèdre jouit encore de la propriété d'être au milieu de la ligne qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques du tétraèdre. En effet, joignons le point I, milieu de l'arête BD, au centre de gravité G. La ligne IG, étant dans le plan AIC, ira rencontrer l'arête AC opposée à BD, ainsi que sa parallèle gg'. Soient I et i les points de rencontre avec ces deux lignes : il est clair que i sera le milieu de gg' et I' le milieu de AC ; car les triangles Gig et AGI' donnent

$$\frac{gi}{AI'} = \frac{Gi}{GI'};$$

de même, les triangles $g'i$G et GI'C donnent

$$\frac{g'i}{CI'} = \frac{Gi}{GI'},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{gi}{AI'} = \frac{g'i}{CI'} \quad \text{ou} \quad \frac{AI'}{CI'} = \frac{gi}{g'i}.$$

On établirait de même, au moyen des triangles IAI' et Iig' d'une part, ICI' et Iig de l'autre,

$$\frac{gi}{CI'} = \frac{g'i}{AI'} \quad \text{ou} \quad \frac{CI'}{AI'} = \frac{gi}{g'i},$$

ou, à cause de (1),

$$\frac{CI'}{AI'} = \frac{AI'}{CI'},$$

ce qui exige que CI' = AI'.

Ainsi la ligne II' joint bien les milieux I et I' de deux arêtes opposées AC et BD. Je dis maintenant que G est le milieu de cette ligne. En effet,

$$\frac{Gi}{GI'} = \frac{ig}{CI'} = \frac{Ig}{IC} = \frac{1}{3},$$

ou

$$Gi = \frac{1}{3} GI'.$$

D'ailleurs,

$$\frac{Ii}{iI'} = \frac{Ig}{gC} = \frac{1}{2},$$

ou

$$Ii = \frac{1}{2} iI' = \frac{1}{2} GI' + \frac{1}{2} Gi = \frac{1}{2} GI' + \frac{1}{6} GI'.$$

Par conséquent,

$$GI = Gi + Ii = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) GI' = GI'.$$

§ 102.

On peut voir, par des considérations mécaniques très-simples, que le centre de gravité du tétraèdre est au milieu de la ligne qui joint les milieux de deux arêtes opposées.

Soit le tétraèdre ABCD (*fig.* 59, *Pl. XII*). Coupons-le par des plans parallèles aux arêtes opposées CD et AB. Ces plans détermineront, sur les faces du tétraèdre, des parallélogrammes tels que $abcd$, $a_1 b_1 c_1 d_1$ dont les côtés sont parallèles à CD et AB. Les centres de ces parallélogrammes sont évidemment sur la ligne II′ qui joint les milieux des arêtes CD et AB. Donc (§ 100) le centre de gravité du volume du tétraèdre se trouve sur cette ligne.

De plus, ces parallélogrammes ayant tous même angle, leurs aires sont entre elles comme les produits de leurs côtés, en sorte que

$$\frac{\text{aire } abcd}{\text{aire } a_1 b_1 c_1 d_1} = \frac{ab \times db}{a_1 b_1 \times d_1 b_1}.$$

Or

$$\frac{ab}{a_1 b_1} = \frac{Cb}{Cb_1},$$

$$\frac{bd}{b_1 d_1} = \frac{Bb}{Bb_1};$$

donc

$$\frac{\text{aire } abcd}{\text{aire } a_1 b_1 c_1 d_1} = \frac{ab \times db}{a_1 b_1 \times d_1 b_1} = \frac{Cb \times Bb}{Cb_1 \times Bb_1},$$

c'est-à-dire que les aires des parallélogrammes sont entre elles comme les produits des deux segments que leurs plans déterminent sur une arête CB. Donc, si l'on prend deux parallélogrammes tels que $abcd$ et $a'b'c'd'$, également distants des sommets C et B, ils sont équivalents, parce que $Cb = Bb'$ et, par suite, $Bb = Cb'$.

D'où

$$\frac{Cb \times Bb}{Cb' \times Bb'} = 1.$$

Il résulte de là que si l'on considère deux plaques infiniment minces, d'égale épaisseur, ayant ces parallélogrammes pour bases, ces plaques auront même volume et même poids, et le centre de gravité de l'ensemble des deux sera dans un plan équidistant de l'une et de l'autre, c'est-à-dire équidistant des sommets C et B. Comme il est sur la ligne II', il sera donc au milieu de cette ligne. Il en est de même de toutes les plaques que l'on considérera ainsi deux par deux, et par suite aussi du volume formé par l'ensemble de toutes ces plaques; et comme ce volume peut être rendu aussi voisin que l'on veut du volume du tétraèdre si les plaques sont prises suffisamment minces, le centre de gravité du tétraèdre se trouvera lui-même au milieu de la ligne II'.

De là, on déduirait comme corollaire ce théorème de Géométrie, démontré directement plus haut :

Les quatre lignes qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se croisent en un même point, qui est le milieu de chacune d'elles.

§ 103.

Pyramide et cône. — *Le centre de gravité du volume d'une pyramide ou d'un cône à base quelconque coïncide avec le centre de gravité de l'aire d'une section parallèle à la base faite au quart de la hauteur de la pyramide ou du cône, à partir de cette base.*

En effet, menons les diagonales issues de l'un des sommets du polygone de base d'une pyramide, et décomposons celle-ci en tétraèdres au moyen de plans passant par ces diagonales et par le sommet de la pyramide. Le centre de gravité de chacun de ces tétraèdres coïn-

cide (§ 101, *Coroll. II*) avec le centre de gravité du triangle que détermine, dans ce tétraèdre, une section parallèle à la base de la pyramide placée au quart de sa hauteur, à partir de cette base. De plus, le volume du tétraèdre est proportionnel à l'aire de ce même triangle. Donc, pour avoir le centre de gravité de la pyramide, il suffit, au centre de gravité de chacun de ces triangles, d'appliquer une force proportionnelle à son aire et de chercher le centre de toutes ces forces parallèles ; ce qui revient à dire qu'il faut chercher le centre de gravité de l'aire du polygone que le plan sécant détermine dans la pyramide.

Ceci étant vrai, quelque nombreuses que soient les faces d'une pyramide inscrite dans un cône, l'est aussi pour un cône.

§ 104.

Tronc de pyramide et tronc de cône à bases parallèles. — Soit (*fig.* 60, *Pl. XII*) un tronc de pyramide à bases parallèles ABCDE*abcde*. Prolongeons le tronc de façon à compléter la pyramide. Soit S son sommet ; soient G_2 et G_1 les centres de gravité des pyramides SABCDE et S*abcde* ; Q_2 et Q_1 leurs volumes. Les points G_2 et G_1 sont sur la ligne qui joint le sommet S aux centres de gravité g_2 et g_1 des bases et au quart des hauteurs Sg_2 et Sg_1, à partir de ces bases.

Le centre de gravité du tronc cherché se trouvera donc aussi sur cette ligne. Si Q est le volume du tronc, on aura

$$Q = Q_2 - Q_1.$$

Donc (§ 80), pour obtenir le centre de gravité G, il suffit, aux centres de gravité G_2 et G_1, d'appliquer des forces proportionnelles à Q_2 et Q_1, parallèles et de *sens contraires*, et de chercher le centre de ces forces parallèles. Le point G sera donc tel (§ 73), que

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{S\overline{a}^3}{S\overline{A}^3}.$$

D'après cela, menons du point S une ligne quelconque SX, et décrivons les arcs de cercle AA′ et *aa′* ayant le point S pour centre. Menons les lignes antiparallèles A*a′* et A′*a* ; prenons sur SX une

longueur quelconque S1 ; menons 1 1′ parallèle à Aa' ; 1′2 parallèle à aA′, et 2 2′ parallèle à Aa. On aura

$$\frac{S1}{S1'} = \frac{Sa'}{SA} = \frac{Sa}{SA},$$

$$\frac{S1'}{S2} = \frac{Sa}{SA'} = \frac{Sa}{SA},$$

$$\frac{S2}{S2'} = \frac{Sa'}{SA} = \frac{Sa}{SA};$$

d'où, en multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs,

$$\frac{S1}{S2'} = \frac{Sa^3}{SA^3} = \frac{GG_2}{GG_1}.$$

Donc, si, au point G, on mène une ligne de direction arbitraire $G_1 u_1 = S2'$, et au point G_2 une parallèle à la précédente, $G_2 u_2 = S1$, et qu'on joigne les points u_1 et u_2, la ligne $u_1 u_2$ ira rencontrer la ligne $G_1 G_2$ au point cherché G.

Rien absolument n'est changé si, au lieu d'un tronc de pyramide, c'est un tronc de cône qui est donné. On prolongera deux arêtes quelconques du tronc jusqu'à leur rencontre en S, et l'on opérera sur l'une d'elles la construction faite sur SA et Sa.

§ 105.

Polyèdre quelconque. — Tout polyèdre pouvant être décomposé en pyramides ou en tétraèdres, on peut trouver maintenant le centre de gravité du volume d'un polyèdre quelconque.

§ 106.

Secteur sphérique. — *Le centre de gravité du volume d'un secteur sphérique est le centre de gravité de la surface d'une calotte sphérique ayant même centre que le secteur donné et pour rayon les trois quarts du rayon de ce secteur.*

La démonstration est tout à fait semblable à celle relative au secteur de cercle (§ 92).

§ 107.

Portion d'enveloppe sphérique. — Considérons (*fig.* 61, *Pl. XII*) une portion d'enveloppe sphérique, engendrée par la demi-révolution de l'anneau $A_2A_1B_2B_1$ compris entre deux arcs de cercle concentriques et les normales A_2A_1 et B_2B_1 à ces arcs, autour de l'axe OC_2 passant par leurs milieux. La ligne OC_2 est une ligne de symétrie sur laquelle se trouvera le centre de gravité cherché. Soit G ce point. Soient G_2 et G_1 les centres de gravité des secteurs OA_2B_2 et OA_1B_1 que nous savons trouver; Q_2 et Q_1 leurs volumes. Le volume Q de l'enveloppe est

$$Q = Q_2 - Q_1.$$

Pour trouver son centre de gravité G, nous devons (§ 80) appliquer aux points G_2 et G_1 des forces parallèles, proportionnelles à Q_2 et Q_1, de sens contraires, et chercher le centre de ces forces parallèles. Ce point sera sur le prolongement de G_2G_1 et divisera cette ligne (§ 73) de façon que

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\overline{OA_2}^3}{\overline{OA_1}^3}.$$

Menons les lignes A_2C_1 et A_1C_2. Prenons sur OA_2 une longueur arbitraire O 1; menons 1 1′ parallèle à A_1C_2; 1′2 parallèle à C_1A_2, et 2 2′ parallèle à A_1C_2. On verrait, comme au § 104, que

$$\frac{O2'}{O1} = \frac{\overline{OA_2}^3}{\overline{OA_1}^3} = \frac{GG_1}{GG_2}.$$

Donc, par G_1, on mènera une ligne de direction quelconque $G_1u_1 = O2'$, et par G_2 une parallèle $G_2u_2 = O1$; la ligne u_1u_2 ira couper le rayon OC_2 au centre de gravité cherché G.

§ 108.

Segment de sphère. — Soit (*fig.* 62, *Pl. XII*) un segment de sphère engendré par la demi-révolution du segment de cercle ABC

autour du rayon OC passant au milieu de AB. Cette ligne est une ligne de symétrie, sur laquelle est placé le centre de gravité cherché G.

Soient G_2 et Q_2 le centre de gravité et le volume du secteur sphérique OACB, et G_1 et Q_1 le centre de gravité et le volume du cône OAB. Nous savons trouver les points G_2 et G_1. Le volume Q du segment étant

$$Q = Q_2 - Q_1,$$

nous aurons comme ci-dessus

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Or le volume du cône OAB est

$$Q_1 = \frac{1}{3}\pi\overline{DB}^2 \times OD.$$

Soient $h = CD$ la hauteur du segment et r le rayon de la sphère, on aura

$$Q_1 = \frac{1}{3}\pi h(2r - h)(r - h).$$

Le volume Q_2 du secteur est

$$Q_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Donc

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi h(2r - h)(r - h)}{\frac{2}{3}\pi r^2 h} = \frac{(2r - h)(r - h)}{2r^2}.$$

Prenons sur la tangente en C une longueur $CF = OD = r - h$; joignons le point F à l'extrémité E du diamètre $CE = 2r$. On aura

$$\frac{DH}{CF} = \frac{ED}{EC},$$

ou

$$\frac{DH}{r - h} = \frac{2r - h}{2r},$$

d'où

$$DH = \frac{(r-h)(2r-h)}{2r},$$

et par suite

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{DH}{r}.$$

Donc, si l'on prend, sur une ligne quelconque issue de G_1, $G_1 u_1$ égal au rayon de la sphère, et sur une parallèle à cette ligne, issue de G_2, $G_2 u_2 = DH$, la ligne $u_1 u_2$ ira couper OC au centre de gravité cherché G.

§ 109.

Centre de gravité du volume d'une zone sphérique. — Soit (*fig.* 63, *Pl. XII*) une zone sphérique engendrée par la demi-révolution de la zone circulaire $A_1 A_2 B_1 B_2$, comprise entre les cordes parallèles $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, autour de l'axe OM. On aura

$$\text{vol. } A_1 A_2 B_1 B_2 = \text{sect. } OA_1 MB_1 - \text{sect. } OA_2 MB_2 + \text{cône } OA_2 B_2 - \text{cône } OA_1 B_1.$$

Nous savons trouver les centres de gravité des quatre corps dans lesquels le volume de la zone se trouve ainsi décomposé. Soient G_1, G_2 les centres de gravité et Q_1, Q_2 les volumes des secteurs OA_1MB_1 et OA_2MB_2; soient de même g_1 et g_2 les centres de gravité, et q_1, q_2 les volumes des cônes, en sorte que

$$\text{vol. } A_1 A_2 B_1 B_2 = Q_1 - Q_2 + q_2 - q_1.$$

Le centre de gravité cherché G est (§ 80) le centre de quatre forces parallèles et proportionnelles à

$$Q_1, \quad -Q_2, \quad q_2 \quad \text{et} \quad -q_1$$

appliquées respectivement aux points

$$G_1, \quad G_2, \quad g_2 \quad \text{et} \quad g_1,$$

les signes *moins*, dans la désignation des forces appliquées en G_2 et g_1, indiquant que ces forces sont de sens contraire à celles appliquées G_1 et g_2.

On a, en appelant r le rayon de la sphère et posant

$$MD_1 = h_1, \quad MD_2 = h_2,$$

$$D_1 B_1 = \rho_1, \quad D_2 B_2 = \rho_2,$$

$$Q_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 h_1, \qquad Q_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h_2,$$

$$q_1 = \frac{1}{3}\pi\rho_1^2 (r - h_1), \quad q_2 = \frac{1}{3}\rho_2^2 (r - h_2).$$

Donc les forces parallèles à appliquer en

$$G_1, \quad G_2, \quad g_2, \quad g_1$$

sont respectivement proportionnelles à

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h_1, \quad -\frac{2}{3}\pi r^2 h_2, \quad \frac{1}{3}\pi\rho_2^2 (r - h_2), \quad -\frac{1}{3}\pi\rho_1^2 (r - h_1),$$

ou à

$$2h_1, \quad -2h_2, \quad (r - h_2)\frac{\rho_2^2}{r^2}, \quad (r - h_1)\frac{\rho_1^2}{r^2}.$$

Prenons sur OM une longueur $O\beta_2 = D_2 B_2 = \rho_2$, et décrivons l'arc de cercle $\beta_2 \beta'_2$ jusqu'à sa rencontre en β'_2 avec OA_1; menons les lignes $M\beta'_2$ et $A_1\beta_2$. Par D_2 conduisons une parallèle $D_2 k'_2$ à $M\beta'_2$, et par k'_2 une parallèle $k'_2 k_2$ à $A_1 \beta_2$. On aura

$$\frac{OD_2}{Ok'_2} = \frac{OM}{O\beta'_2} = \frac{r}{\rho_2},$$

$$\frac{Ok'_2}{Ok_2} = \frac{OA_1}{O\beta_2} = \frac{r}{\rho_2};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{OD_2}{Ok_2} = \frac{r^2}{\rho_2^2},$$

ou

$$Ok_2 = OD_2 \frac{\rho_2^2}{r^2} = (r - h_2)\frac{\rho_2^2}{r^2}.$$

On trouvera de même, en portant sur OM et sur OA les lon-

gueurs $O\beta_1 = O\beta'_1 = D_1 B_1 = \rho_1$, joignant $M\beta'_1$ et $A_1 \beta_1$, et menant $D_1 k'_1$ et $k'_1 k_1$, parallèles à ces deux lignes,

$$O k_1 = (r - h_1) \frac{\rho^2}{r^2}.$$

Donc les forces à appliquer aux points

$$G_1, \quad G_2, \quad g_2 \quad \text{et} \quad g$$

sont proportionnelles aux lignes

$$2OD_1, \quad -2OD_2, \quad O k_2 \quad \text{et} \quad -O k_1.$$

Appelons-les

$$1, \ 2, \ 3, \ 4,$$

et portons-les sur une ligne OX (*fig.* 63), parallèle à $A_1 B_1$ à partir de O; puis, appelant

$$1, \ 2, \ 3, \ 4$$

leurs lignes d'action issues de G_1, G_2, g_2 et g_1, construisons le polygone funiculaire relatif au pôle C; nous déterminerons ainsi la résultante de ces forces, résultante dont l'intersection avec OM est le centre de gravité cherché G.

§ 110.

Segment de paraboloïde. — Soit (*fig.* 57, *Pl. XI*) un segment de paraboloïde ABI. Soit IX le diamètre conjugué à la section BA. Comme IX est le lieu des centres de figure, et par suite des centres de gravité des sections faites dans le paraboloïde, parallèlement à BA, le centre de gravité G se trouvera sur cette ligne (§ 100). Soient x et y les coordonnées de la parabole BIA, relativement aux axes IX et IY. Les sections parallèles à BA étant toutes semblables entre elles, leurs aires sont comme les carrés des ordonnées de la parabole. Donc le théorème des moments relatifs au plan tangent en I donne

$$IG \int y^2 \, dx = \int x y^2 \, dx,$$

et, comme $y^2 = 2px$,

$$IG \int x \, dx = \int x^2 \, dx,$$

les intégrales étant à prendre de $x = 0$ à $x = \mathrm{CI}$.

Donc

$$\mathrm{IG} = \frac{\frac{1}{3}\overline{\mathrm{CI}}^3}{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CI}}^2} = \frac{2}{3}\,\mathrm{IC}.$$

§ 111.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS QUELCONQUE. — On inscrira, dans la surface limitant le corps, un polyèdre d'un assez grand nombre de faces pour que ce polyèdre puisse être sensiblement confondu avec le corps, et l'on en cherchera le centre de gravité par la méthode du § 105.

Digitized by Google

TROISIÈME SECTION.

APPLICATION DE LA STATIQUE GRAPHIQUE A L'ART DES CONSTRUCTIONS.

CHAPITRE XI.

APPLICATION A UN FRAMEWORK EN GÉNÉRAL.

§ 112.

DÉFINITION DES FRAMEWORKS ET AVANTAGES QU'ILS PRÉSENTENT DANS LES CONSTRUCTIONS. — La plupart des systèmes de barres que nous aurons à considérer seront des figures strictement indéformables formées comme celle (*fig.* 69, *Pl. XIV*) :

1° D'une suite de barres *ab*, *bc*, *cd*, *de*, limitant la figure à sa partie supérieure par un contour soit rectiligne, soit polygonal. Nous appellerons ces barres les barres *supérieures;*

2° D'une seconde série analogue *ag*, *gf*, *fe*, limitant la figure à sa partie inférieure et que nous appellerons les barres *inférieures;*

3° Ces deux lignes de barres sont habituellement réunies par des barres plus inclinées, telles que *bg*, *gc*, *cf*, *fd* : celles de ces barres qui sont inclinées dans le même sens que la première de gauche *bg* seront appelées des *étrésillons* ou *bracons;* celles qui sont inclinées dans le même sens que la deuxième *gc* à partir de la gauche seront désignées sous le nom de *contre-étrésillons* ou *contre-bracons*.

Lorsque certains étrésillons sont verticaux, nous les appellerons des *poinçons*.

Les figures que nous venons de définir sont caractérisées par ce que :

1° Elles sont formées de triangles et sont strictement indéformables;

2° Une section transversale quelconque xy ne coupe jamais plus de trois barres (*fig.* 69).

Leur emploi, dans l'art des constructions, se répand de plus en plus dans tous les pays étrangers, et partout on les désigne sous des noms particuliers : en Angleterre, ce sont des *frameworks;* en Allemagne, des *Fachwerk;* en Italie, des *travature reticolari.*

Il est facile de comprendre le prix que les constructeurs y attachent :

1° Elles présentent les conditions d'*indéformabilité* que l'on doit rechercher dans toute ossature ou charpente en bois ou en métal et elles les présentent sans dispositions compliquées, avec le plus petit nombre possible de pièces, par conséquent avec des pièces *robustes,* peu sensibles aux trépidations, peu susceptibles d'être faussées lors de la pose, offrant la plus faible surface possible à l'oxydation ou à la pourriture, et présentant le moins possible d'assemblages, de rivetages, etc.

2° Elles peuvent être calculées d'après les seuls principes de la Statique, sans recours aux hypothèses de la résistance des matériaux. Ce point a une grande importance ; car, si les constructeurs adoptent, dans la pratique, des charges si notablement inférieures à celles que les matières employées peuvent supporter, c'est, en partie, à cause des incertitudes qui règnent dans les calculs de la résistance des matériaux. Ici ces incertitudes disparaissent et les calculs laborieux de la résistance peuvent être remplacés, avec une exactitude parfaitement suffisante, par les constructions géométriques très-simples et très-méthodiques de la Statique graphique. Enfin ces systèmes sont à peu près les seuls qui puissent être véritablement constitués en forme de *solides d'égale résistance,* c'est-à-dire avec la plus grande économie possible de matière (*). Les pièces appelées solides d'égale résistance dans les théories semi-empiriques, semi-rationnelles de la résistance des matériaux ne méritent pas tout à fait ce nom : car il n'y a que les deux fibres extrêmes de chaque pièce (*celle qui subit le plus grand allongement et celle qui subit le plus grand raccourcissement élastique*) qui supportent les tensions ou pressions auxquelles la matière employée permet d'atteindre; toutes les autres fibres

(*) Cela ressort du Mémoire (Note II) placé à la suite de cet Ouvrage.

supportent des efforts élastiques moindres; la matière n'est donc pas employée le mieux possible.

En général, quand une pièce est soumise à ce qu'on appelle la *flexion,* c'est-à-dire à une déformation élastique où les fibres s'allongent ou se raccourcissent de quantités inégales, il est clair que, de *quelque manière que l'on s'y prenne,* il est impossible de faire en sorte qu'elles supportent toutes le même effort élastique par unité de surface; en d'autres termes, il est impossible d'édifier, en forme de solide d'égale résistance, une pièce qui *fléchit.*

Au contraire, on obtient un solide d'égale résistance, et le plus simple possible, en soumettant une barre à la traction simple ou à la compression simple, c'est-à-dire en appliquant à ses deux extrémités deux forces égales et contraires; car, toutes ses fibres subissant alors le même allongement ou le même raccourcissement, la tension ou pression par unité de surface est la même dans toute son étendue.

Qu'on prenne maintenant un assemblage de barres réunies entre elles par articulations, et qu'on soumette ce système à des efforts extérieurs quelconques; s'il est tel que *la Statique seule suffise* à calculer les tensions de ses divers côtés, ce qui exige simplement (§ 64 et 65) qu'il forme une figure déformable ou strictement indéformable, alors on pourra toujours, une fois les tensions des barres graphiquement obtenues, déterminer leurs sections, de façon que toutes les barres tendues supportent même tension et toutes les barres pressées même pression par unité de surface. On aura donc un solide d'égale résistance *dans la vraie et meilleure acception possible du mot.*

Cet avantage est immense : les ingénieurs des États-Unis, avec le sens pratique qu'ils possèdent à un si haut degré, l'ont depuis longtemps et instinctivement compris. Ils n'emploient plus le métal à la flexion; tous leurs grands ponts sont formés de pièces articulées ne travaillant qu'à l'extension simple *ou* à la compression simple (*); et par là ils arrivent à des résultats comme ceux-ci : tandis que, sur l'ancien continent, on regarde une portée

(*) Ils disposent même généralement leurs ouvrages de façon que jamais, même sous l'action d'une charge roulante, une pièce ne puisse travailler tantôt à la compression, tantôt à l'extension. Ils préfèrent doubler les barres.

de 80 à 100 mètres comme une chose fort remarquable, aux États-Unis, on fait des ponts parfaitement rigides ayant des portées de 300 à 400 mètres. Actuellement on construit à New-York un pont dont la travée centrale aura 497 mètres, soit, en nombre rond, un demi-kilomètre de portée. (*Voir* le très-beau Mémoire, sur sa mission en Amérique, de M. l'ingénieur en chef Malézieux.)

M. Malézieux rapporte que, pour un grand pont projeté sur l'Ohio, on a fait divers projets : les uns, au moyen de poutres en croix de Saint-André ou à treillis, et les autres, en systèmes de barres articulées; que les calculs comparatifs ont montré que ce sont ces derniers qui offrent le plus d'économie. Les ingénieurs américains attribuent cela à diverses causes. Pour nous, la cause est bien simple : elle se trouve dans les réflexions qui précèdent et qui montrent combien est judicieux l'emploi du métal par allongement simple ou compression simple; combien relativement irrationnels, dispendieux, difficiles ou impossibles à calculer avec sécurité les systèmes dans lesquels le métal travaille par flexion.

Remarque. — Il est facile de comprendre *a priori* que toutes les forces intérieures des diverses pièces qui composent un *framework* peuvent être déterminées par les procédés de la Statique graphique. En effet, faisons, dans une telle figure, une section quelconque. La portion de la figure placée d'un côté du plan sécant doit être en équilibre sous l'action des forces qui y sont appliquées et des tensions des barres coupées; mais, ces barres étant au nombre de trois, déterminer leurs tensions revient à trouver les grandeurs de trois forces dont les lignes d'action sont données, par la condition qu'elles fassent équilibre à un système de forces donné. Ce problème a été résolu (§ 57 et 57 *bis*), et, en appliquant la solution à un nombre suffisant de sections, on trouverait successivement les tensions de toutes les barres.

Ce procédé, si simple qu'il soit, comparé aux calculs, la plupart du temps impraticables, qu'exigerait la Statique ordinaire (*), peut

(*) On comprend que les barres d'une figure comme celle 74, *Pl. XVI*, en y introduisant les lignes trigonométriques des angles variables d'une barre à l'autre, seraient impraticables; car il ne faut pas perdre de vue que c'est par centaines que se comptent les barres qui entrent dans une construction telle qu'un pont. De plus, certaines de ces barres sont pressées et d'autres tendues; il y aurait là une confusion et une complication inextricables.

Digitized by Google

être considérablement simplifié encore et facilité par l'emploi des figures réciproques ; c'est ce que nous allons montrer ; mais nous devions faire ressortir cette méthode fondée sur l'emploi des sections faites en travers d'une figure ; car elle peut être utilisée même quand certaines sections particulières seulement satisfont à la condition de ne couper que trois barres. On peut alors, si compliqué que soit le reste de la figure, trouver les tensions des barres ainsi coupées, et la connaissance de ces tensions particulières permet parfois de trouver, par les méthodes que nous allons exposer, les tensions de toutes les autres barres, même quand certains plans sécants rencontreraient plus de trois d'entre elles.

Nous ferons notamment usage de ce procédé au § 129, dans l'étude des grandes charpentes pour toitures.

§ 113.

RECHERCHE DES TENSIONS D'UN FRAMEWORK SOUMIS A DES FORCES QUELCONQUES. — Soit (*fig.* 64, *Pl. XIII*) un framework soumis à un système de forces en équilibre

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ;

sur la *fig.* 64 est représenté par des lignes doubles

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

le polygone de ces forces, et sur la *fig.* 64 nous avons tracé leur polygone funiculaire relatif au pôle quelconque O.

Ce que nous avons à construire (§ 63), c'est le diagramme réciproque de la *fig.* 64, en y comprenant le polygone funiculaire. Les lignes de ce diagramme réciproque nous donneront la mesure des tensions ou pressions que subissent les lignes correspondantes de la figure donnée.

Nous commencerons par construire la figure réciproque du nœud formé par les trois lignes 10, 11, 12, que nous appellerons, pour abréger, le nœud (10, 11, 12). Ce nœud comprenant trois lignes, sa figure réciproque sera un polygone fermé de trois côtés, c'est-

à-dire un triangle. Nous connaissons déjà un côté de ce triangle, à savoir : le côté 10 du polygone des forces, réciproque de 10. Donc, pour avoir les deux autres côtés, on devra, par l'une des extrémités de 10, mener une parallèle à 11 et, par l'autre, une parallèle à 12 ; mais ici se présente une ambiguïté. Il n'est pas indifférent de partir de l'une ou de l'autre des extrémités de 10 pour mener la parallèle à 11 ; faute de placer les lignes comme il faut, on n'a pas la figure réciproque, et l'on obtient des lignes qu'il faut ensuite déplacer parallèlement à elles-mêmes, pour les faire servir dans les constructions subséquentes. Cela entraînerait des complications très-grandes et ôterait à la méthode sa simplicité pratique et son élégance.

Pour lever l'ambiguïté, il suffit de se rappeler (§ 26) que chacun des côtés des figures que nous considérons fait partie de deux polygones fermés et de deux seulement ; le côté 10, en particulier, fait partie de deux quadrilatères : l'un d'eux comprend, outre la ligne 10, les lignes 11, 1 et le côté du polygone funiculaire compris entre 10 et 1 (*).

Les lignes 10, 1 et 11, faisant ainsi partie d'un même polygone fermé, ont pour réciproque un nœud. Ce nœud est nécessairement le sommet formé par l'intersection des côtés 10 et 1 du polygone des forces, puisqu'ils sont réciproques de 10 et 1. Donc c'est par le sommet (10, 1) qu'il faut mener la parallèle à 11 et, par suite, c'est par le sommet (10, 9) qu'il faut mener la parallèle à 12, ce qu'on verrait d'ailleurs directement en raisonnant sur le second des quadrilatères fermés dont fait partie 10 comme nous avons fait sur le premier.

Nous avons ainsi le triangle (10, 11, 12) réciproque du nœud (10, 11, 12).

Passons au nœud (12, 13, 14, 9), qui a pour réciproque un quadrilatère fermé. Nous connaissons deux côtés de ce quadrilatère, à savoir : les lignes 12 et 9 réciproques de 12 et 9. Donc par l'extrémité de 12 on devra mener une parallèle à l'une des deux lignes 13, 14, et, par l'extrémité de 9, une parallèle à l'autre de ces deux

(*) L'autre, dont nous n'avons pas besoin quant à présent, comprend, outre 10, les lignes 12, 9 et le côté du polygone funiculaire compris entre 10 et 9.

lignes. Il y a ici la même ambiguïté que tout à l'heure, et on la lève de la même manière.

La ligne 12 fait partie de deux polygones fermés, dont l'un est le triangle (12, 13, 11) (*). Donc ces lignes ont pour réciproque un nœud, et ce nœud est déterminé par l'intersection de 11 et 12; donc c'est par le point (11, 12) qu'on devra mener la parallèle à 13 et, par suite, par le point (8, 9) la parallèle à 14, ce qu'on reconnaîtrait encore en remarquant que 8, 9 et 14 font partie d'un quadrilatère fermé.

Passons au nœud (1, 11, 13, 15, 16). Il a pour réciproque un pentagone fermé. Nous connaissons trois côtés de ce pentagone, à savoir, 1, 11, 13, réciproques de 1, 11, 13.

Donc par (1, 2) on devra mener une parallèle à l'une des deux lignes restantes 15 ou 16 et par (13, 14) une parallèle à l'autre; mais, 1, 2 et 16 faisant partie d'un même quadrilatère, c'est par (1, 2) qu'on mènera la ligne 16 et, par suite, par (13, 14) la ligne 15.

On passera ensuite au nœud (14, 15, 17, 18, 8) qui aura aussi pour réciproque un pentagone dont on connaît trois côtés 14, 15, 8. Comme 7, 8 et 18 font partie d'un quadrilatère fermé, par (7, 8) on mènera une parallèle à 18 et par (15, 16) une parallèle à 17.

On poursuivra ainsi : en arrivant à un nœud quelconque, on connaît, par les constructions faites antérieurement, toutes ses lignes réciproques sauf deux, en sorte que par l'une des extrémités du contour formé par les lignes connues on mène des parallèles à l'une des deux lignes dont la réciproque est à chercher, et par l'autre une parallèle à l'autre de ces lignes, et l'on sait toujours par quelle extrémité il faut conduire chacune des deux parallèles.

Vérification. — Arrivé au dernier nœud (26, 27, 5), on en connaît d'avance toutes les lignes; la ligne 27 se trouve tracée sur le polygone réciproque du nœud (24, 4, 25, 27); la ligne 26 se trouve tracée sur le polygone réciproque du nœud (22, 6, 23, 25, 26);

(*) L'autre est le quadrilatère formé de 10, 12, 9 et du côté du polygone funiculaire joignant 10 et 9.

enfin la ligne 5 se trouve sur le polygone des forces. Il faut, *comme vérification,* que ces trois lignes forment un triangle fermé. Une telle vérification se trouve à la fin de tous les tracés de la Statique graphique.

RÈGLE A SUIVRE POUR DISTINGUER LES LIGNES TENDUES ET LES LIGNES COMPRIMÉES. — Nous avons indiqué en traits *forts* les lignes comprimées et en traits *minces* les lignes tendues.

Rien n'est plus simple que de les distinguer. Prenons le nœud (10, 11, 12). Dans le triangle (10, 11, 12) réciproque de ce nœud, 10 est la résultante des lignes 11 et 12. Donc le contour formé par ces deux lignes doit être parcouru en partant de l'origine de 10, c'est-à-dire (§ 2) du point (10, 9). En le parcourant ainsi, on obtient le sens des forces 12 et 11; et en concevant ces forces appliquées au nœud (10, 11, 12) on voit que la ligne 12 est tendue et la ligne 11 comprimée.

En général, dans le polygone réciproque d'un nœud quelconque N, il y a un côté C appartenant au polygone des forces. Le contour formé par les autres côtés doit être parcouru en partant de l'origine de C pour aboutir à son extrémité. On conçoit les forces avec leurs sens ainsi obtenus, appliquées en N : celles qui tombent suivant les lignes de la figure issues de N sont des pressions; celles qui tombent en prolongement de ces lignes sont des tensions.

S'il y a des nœuds pour lesquels la force C se réduit à zéro, on se sert d'un des autres côtés, déjà connus en sens, du polygone réciproque de N, pour fixer le sens cyclique (§ 1) de ce polygone.

Il est d'ailleurs bon de faire le départ entre les pressions et les tensions, *au fur et à mesure* de la construction des polygones réciproques.

Remarque I. — Habituellement, dans la pratique, lorsque toutes les forces appliquées aux divers sommets d'une figure sont connues d'avance, on se dispense de tracer le polygone funiculaire indiqué au pointillé sur la *fig.* 64, de même qu'on se dispense de tracer, sur le diagramme 64, les lignes issues de 0 et parallèles aux côtés de ce polygone. On trace directement toutes les autres lignes qui constituent à elles seules la solution du problème. Pourvu que le polygone des forces soit tracé, on peut y rattacher toutes les autres lignes du diagramme réciproque; seulement, pour lever les ambi-

Digitized by Google

guïtés qui se présentent sur la position à donner aux diverses lignes, il faut *concevoir* la figure complétée par le polygone funiculaire et se rappeler que trois lignes, telles que 1, 2 et 16, font partie d'un quadrilatère fermé dont le quatrième côté appartiendrait au polygone funiculaire, s'il était tracé, en sorte que ces trois lignes doivent, dans le diagramme réciproque, concourir en un même point.

Mais, la plupart du temps, on ne connait pas d'avance toutes les forces appliquées aux divers sommets des figures, parce que, parmi ces forces, il se trouve des réactions d'appui qu'il faut commencer par déterminer. Nous n'insisterons pas toujours sur les règles à suivre pour cela, ces règles ayant été indiquées en détail au chapitre V, et nous supposerons quelquefois, pour ne pas compliquer de questions accessoires ce qui fait l'objet principal de ce qui va suivre, toutes les forces extérieures, y compris les réactions des appuis, connues. Nous ne tracerons donc pas, en général, le polygone funiculaire qui figure sur le diagramme 64, ni les rayons correspondants du diagramme réciproque 64; mais on n'oubliera pas, et cela ressort suffisamment des diagrammes que nous donnons, que, dans la pratique, on sera presque toujours obligé de commencer les épures par le tracé de ces lignes, parce que ce sont elles qui fournissent les grandeurs des réactions des appuis.

Remarque II. — Dans ce qui va suivre, nous n'emploierons plus des chiffres moulés pour désigner les lignes d'action des forces et des chiffres ordinaires pour représenter leurs grandeurs. Les deux lignes représentatives d'une force seront l'une et l'autre désignées par un même chiffre *ordinaire*. Seulement, la figure formée par les lignes d'action d'un système de forces sera désignée par un numéro *gras*, et la figure formée par les lignes représentant les grandeurs des forces, sera désignée par le numéro similaire, écrit en chiffres ordinaires. De plus, dans le texte, nous continuerons à indiquer par des chiffres *gras* les lignes de la première de ces figures, et par des chiffres ordinaires les lignes de la seconde. De cette façon, aucune ambiguïté ne sera possible.

Ainsi, quand nous étudierons, par exemple, le diagramme formé par les *fig.* 65 et 65 de la *Pl. XIII*, et que nous parlerons des lignes

1, 2, 3,...

de ce diagramme, on saura qu'il s'agit des lignes portant les numéros

1, 2, 3,...,

sur la *fig.* 65; tandis que quand nous parlerons des lignes

1, 2, 3,...,

on saura qu'il s'agit des lignes portant ces numéros sur la *fig.* 65.

CHAPITRE XII.

APPLICATION AUX DIVERSES ESPÈCES DE PONTS FIXES.

1° *Ponts à poutres droites.*

§ 114.

POUTRES DROITES DE HAUTEUR CONSTANTE, PORTANT DES CHARGES VERTICALES UNIFORMES OU QUELCONQUES SUR LE TABLIER. — Considérons le type représenté par la *fig.* 65 (*Pl. XIII*) et portant les charges verticales ayant pour lignes d'action

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Il est facile, par le tracé d'un polygone funiculaire, de trouver les réactions des appuis. Dans le cas particulier où toutes les charges seraient égales, les réactions seraient chacune égales à la demi-somme des charges. Soient généralement 9 et 10 les lignes d'action de ces réactions. Le polygone des forces se réduit à une ligne droite qui est tracée en doubles traits sur la *fig.* 65. De ce polygone on connaît les côtés

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Les réactions 9 et 10 sont données par le tracé du polygone funi-

Digitized by Google

culaire relatif à un pôle quelconque O, le rayon O9.10 étant parallèle à la ligne 9.10 qui ferme ce polygone.

On tracera d'abord la réciproque du nœud (10, 11, 12). C'est un triangle dont on connaît le côté 10. On voit que 10 fait partie d'un quadrilatère fermé dont 1 et 10 sont deux côtés. Donc, par (10, 1), on mène une parallèle à 11, et par (10, 9) une parallèle à 12; 12 est comprimé et 11 tendu.

Passons au nœud (1, 11, 13, 14). Sa réciproque est un quadrilatère dont on connaît les côtés 1 et 11. Pour avoir 13, on remarque que 13 fait partie d'un polygone fermé (triangle), avec 11 et 12. Donc, par le point (11, 12), on mène une parallèle à 13, et par (1, 2) une parallèle à 14; 13 est comprimé et 14 est tendu.

Passons au nœud (12, 13, 15, 16); on connaît les côtés 12 et 13 de son quadrilatère réciproque. Par (13, 14) on mène une parallèle à 15 (*puisque* 13, 14, 15 *forment un triangle*), et par l'extrémité de 12 une parallèle à 16; 16 est comprimé et 15 tendu. En poursuivant de même, on obtiendra tout le diagramme.

Remarque I. — Les diagrammes 65 et 65 montrent ce qui suit :

1° Les barres supérieures sont toutes comprimées; les barres inférieures toutes tendues.

Les barres inclinées sont alternativement tendues et comprimées, sauf celles 23 et 25 qui sont toutes deux tendues. Ces deux barres sont celles entre lesquelles tomberait la résultante statique des charges appliquées à la poutre.

2° Les tensions ou pressions des barres horizontales vont en croissant, depuis les extrémités de la pièce jusqu'au point d'application de la résultante statique des charges.

3° Les tensions ou compressions des barres inclinées vont au contraire en diminuant, depuis les extrémités jusqu'à ce point d'application.

Remarque II. — Les *fig.* 66, 66 donnent l'épure d'une poutre chargée uniformément. Les compressions, ou tensions des barres horizontales, vont en augmentant, et celles des barres inclinées en diminuant, des extrémités au milieu de la pièce. Les pressions des deux barres du milieu sont *nulles*.

§ 115.

POUTRES DE HAUTEUR CONSTANTE NE PORTANT QU'UNE CHARGE CONCENTRÉE EN UN POINT DU TABLIER. — La *fig.* 67, 67 (*Pl. XIII*) donne le diagramme d'une poutre de hauteur constante portant une charge concentrée en un point quelconque de son tablier, et la (*fig.* 68, 68 (*Pl. XIV*) donne le même diagramme, lorsque la charge est au milieu. Dans ce dernier cas, les réactions des appuis 2 et 3 sont chacune la moitié de la charge 1; dans le premier, elles sont données par le polygone funiculaire tracé sur le diagramme.

On déduit encore de ces diagrammes :

1° Que les barres supérieures sont toutes comprimées, les barres inférieures tendues. Ces pressions ou tensions vont en augmentant des extrémités de la pièce jusqu'au point d'application de la charge.

2° Les barres inclinées sont alternativement tendues et comprimées, sauf les deux contigues à la charge, qui sont toutes deux tendues. Ces pressions ou tensions vont en diminuant depuis les extrémités de la pièce jusqu'au point d'application de la charge.

Remarque I. — Les constructions précédentes ne supposent en rien que les étrésillons et contre-étrésillons soient symétriques. Elles s'appliquent, quelles que soient les inclinaisons de ces pièces, et en particulier quand certaines d'entre elles sont verticales. Nous retrouverons ce cas, qui se présente fréquemment dans la pratique, à l'occasion des ponts suspendus rigides.

Remarque II. — Les diagrammes seraient tout aussi simples à trouver, si les charges étaient appliquées aux sommets supérieurs de la figure, au lieu de l'être aux sommets inférieurs.

Si des charges étaient appliquées simultanément à tous les sommets, on pourrait faire deux épures, l'une, en ne considérant que les charges sur le tablier, l'autre, en ne considérant que les charges sur les nœuds supérieurs; mais il est plus simple de ne faire qu'une épure. La chose ne souffre aucune difficulté. Nous allons en donner un exemple dans le cas un peu plus complexe d'une poutre de hauteur variable.

§ 116.

POUTRE DROITE DE HAUTEUR VARIABLE PORTANT DES CHARGES VERTICALES QUELCONQUES. — Soit (*fig.* 70, *Pl. XIV*) une poutre de hauteur

variable reposant sur deux appuis. Elle est formée de poinçons verticaux, d'étrésillons et contre-étrésillons symétriquement placés par rapport au milieu de la pièce. Elle est soumise aux forces verticales

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Nous construirons les deux réactions verticales 1 et 9 comme il a été fait précédemment (*). Ces forces connues, d'un point *a* (*fig.* 70) portons bout à bout les forces à partir de la première. Nous aurons le polygone 1.2.3.4.5.6.8.9.10.11.12.13.14.15.16 qui se fermera, c'est-à-dire que nous reviendrons nécessairement au point *a*.

Cela posé, nous construisons le triangle réciproque du nœud (1, 17, 18). A cet effet nous remarquons que, si l'on traçait sur la figure un polygone funiculaire, les lignes 1, 2 et 18 feraient partie d'un polygone fermé. Donc, dans le diagramme réciproque, elles forment un nœud; donc, par le point (1, 2) nous menons une parallèle à 18, et par le point (1, 16) une parallèle à 17.

Nous passons ensuite au nœud (16, 17, 19, 20) dont la figure réciproque est un quadrilatère. Nous connaissons les côtés 16 et 17 de ce quadrilatère.

Les lignes 16, 15, 20 font partie d'un polygone fermé et donneront, par suite, un nœud dans le diagramme réciproque; donc par (15, 16) on mènera une parallèle à 20, et comme 17, 18, 19 forment un triangle, par (17, 18) on mènera une parallèle à 19.

Passons ensuite au nœud (2, 18, 19, 21, 22) qui est, lui, formé de cinq lignes (**) et a pour réciproque un pentagone. On connaît les trois côtés 2, 18 et 19 de ce pentagone. La ligne 22 faisant partie avec 2 et 3 d'un quadrilatère fermé, les lignes 2, 3 et 22 sont concourantes; donc par (2, 3), on mène une parallèle à 22, et par (19, 20), une parallèle à 21.

On passe ensuite au nœud (15, 20, 21, 23, 24) dont on connaît toutes les lignes réciproques, sauf celles des deux dernières. Pour les obtenir, par (14, 15) on mènera une parallèle à 24, et par (21, 22) une parallèle à 23.

(*) On cherche la résultante des forces données 2, 3,..., 8, 10, 16 (§ 50), et on la décompose suivant les lignes 1 et 9 (§ 51).

(**) Il faut toujours du nœud primitif, qui a trois lignes, passer ensuite à celui des deux nœuds voisins qui a le moins de lignes.

On continuera ainsi jusqu'au nœud (4, 26, 27, 29, 30). Si de celui-ci on passait au nœud (13, 28, 29, 31, 33, 34), on ne pourrait pas le construire. Cela tient à ce qu'il contient une ligne de plus que tous les autres. On ne connaît les réciproques que des trois premières de ces six lignes, et le problème consistant à compléter le polygone serait indéterminé.

On construira donc d'abord la figure réciproque du nœud (5, 30, 31, 32), qui, lui, contient au contraire une ligne de *moins* que les précédents, et admet pour réciproque un quadrilatère dont on connaît les deux côtés, 5 et 30. Pour avoir les deux autres, par (29, 30), on mènera une parallèle à 31, et par (5, 6) une parallèle à 32.

Alors on pourra passer au nœud à six côtés (13, 28, 29, 31, 33, 34), dont on connaîtra toutes les lignes réciproques, sauf les deux dernières, et l'on poursuivra les constructions sans difficulté sur la seconde moitié de la pièce.

Si les charges sont symétriques, on pourra évidemment se dispenser de cette partie des opérations.

2° *Ponts suspendus.*

§ 117.

PONTS SUSPENDUS RIGIDES. — Soit (*fig.* 71, *Pl. XV*) une chaîne de pont suspendu réunie à son tablier non par de simples montants verticaux, comme on les construit habituellement, mais au moyen de tringles inclinées qui fassent, du tout, un système rigide. (Cela n'empêchera pas qu'il soit bon d'établir la chaîne en forme de polygone funiculaire, comme si elle était déformable.)

On donne les forces verticales agissant sur la chaîne

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

et celles qui agissent sur le tablier

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

On connaît les tensions suivant les lignes extrêmes 9 et 17 du polygone funiculaire formant la chaîne, par le tracé même de ce polygone.

On voit qu'ici ces tensions, qui sont les analogues de ce qui, dans

les ponts à poutres droites, constitue les réactions des appuis, sont inclinées. Le polygone des forces ne sera donc plus, comme au paragraphe précédent, une simple ligne verticale.

Pour le former, on portera (*fig.* 71), sur une ligne verticale et bout à bout, les forces 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ; au bout de 8 on portera la force inclinée 9; puis, au bout de 9, les forces verticales 10, 11, 12, 13, 14, 5, 16, et enfin la ligne 17 fermera le polygone des forces.

Pour tracer le quadrilatère réciproque du nœud (1, 17, 18, 19), dont les deux premiers côtés sont connus, on remarque que, si la figure était complétée par le tracé d'un polygone funiculaire quelconque, les lignes 1, 2, 19 feraient partie d'un quadrilatère fermé, ainsi que celles 16, 17, 18. Donc par (1, 2) on mènera une parallèle à 19, et par (16, 17) une parallèle à 18.

On passe ensuite à la réciproque du nœud (16, 18, 20, 21), dont on connaît les deux lignes 16 et 18. Les lignes 18, 19, 20 forment un triangle; donc par (18, 19) on mènera une parallèle à 20, et par (15, 16) une parallèle à 21, et ainsi de suite.

§ 118.

AUTRE EXEMPLE DE PONT SUSPENDU RIGIDE. — On voit (*fig.* 72, 72, *Pl. XV*) un autre exemple de pont suspendu rigide, dans lequel les montants verticaux qui soutiennent le tablier sont renforcés par des étrésillons symétriquement placés par rapport au milieu.

Nous supposons, pour montrer la forme que prend, dans cette nouvelle hypothèse, le diagramme réciproque, que les charges verticales ne portent que sur le tablier. Le polygone des forces se réduit à un triangle, et les lignes réciproques des côtés du polygone funiculaire partent toutes du point O, pôle de ce polygone.

§ 119.

PONT SUSPENDU ORDINAIRE. — La *fig.* 73, 73 (*Pl. XV*) représente un pont suspendu tel qu'on les construit habituellement, c'est-à-dire dont le tablier est simplement soutenu par des barres verticales. La

chaîne est un polygone funiculaire dont le pôle est le point O de concours des lignes de la *fig.* 73. Le polygone des forces est indiqué en lignes doubles.

Ponts en arc.

§ 120.

PONT EN ARC AVEC SON TYMPAN. — Soit (*fig.* 74, *Pl. XVI*) un arc avec son tympan.

Il est soumis :

1° Aux forces verticales 1, 2, 3,..., 12 agissant sur le tablier ;

2° A celles 14, 15, 16,..., 26 agissant sur l'arc ;

3° Aux réactions des culées 27 et 13. Le polygone des forces est représenté comme toujours par des doubles lignes (*fig.* 74).

1° On construira le quadrilatère réciproque du nœud (26, 27, 28, 29) dont on connait les deux côtés 26 et 27. Par (25, 26) on mènera une parallèle à 29, et par (27, 1) une parallèle à 28.

2° On passera ensuite au nœud (1, 28, 30, 31) ; la réciproque de ce nœud est un quadrilatère dont on connait les côtés 1 et 28. Par (28, 29) on mènera une parallèle à 30, et par (1, 2) une parallèle à 31.

La réciproque du nœud (25, 29, 30, 32, 33) est un pentagone dont on connait les trois côtés 25, 29, 30. Par (30, 31) on mènera une parallèle à 32 ; par (24, 25) une parallèle à 33. De là on passera au nœud (2, 31, 32, 34, 35), et ainsi de suite.

Il est à peine besoin de faire ressortir à quels calculs inextricables on serait amené pour résoudre par la Statique ordinaire le problème qui fait l'objet de ce paragraphe.

Remarque. — Le pont d'Arcole, sur la Seine, à Paris, est fait suivant le type que représente la *fig.* 73, sauf quelques barres additionnelles qui évidemment, dans la pensée des auteurs de ce bel ouvrage, sont moins destinées à contribuer à la résistance générale qu'à empêcher les barres principales de fléchir.

Digitized by Google

CHAPITRE XIII.

APPLICATION AUX PONTS TOURNANTS ET AUX GRUES TOURNANTES.

§ 121.

GRUE TOURNANTE. — La *fig.* 76 (*Pl. XVIII*) représente une grue tournante dont le dessin est tiré de l'Ouvrage de M. Cremona. La grue est mobile autour de l'axe vertical **11** et retenue par le tirant **12**.

Les forces données qui agissent sur la grue sont les forces verticales

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

représentées sur le polygone des forces (*fig.* 76) par

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ces forces sont tenues en équilibre par les tensions des pièces **10, 11, 12**. Pour trouver ces tensions, on cherche la résultante des neuf forces données. Il suffit pour cela de construire un polygone funiculaire, par exemple le polygone relatif au pôle **0**. Soit R la résultante fournie par cette construction. On devra décomposer R en deux forces : l'une suivant **10**, l'autre C*i* passant par le point d'intersection de **11** et **12**; puis décomposer à son tour cette force C*i* suivant **11** et **12**. Il suffit pour cela, sur le polygone des forces, de mener, par l'extrémité de 9, une parallèle à **10**; par l'origine *a* de 1 une parallèle *ab* à C*i*, ce qui détermine le point *b*; puis par *b* une parallèle à **11** et par *a* une parallèle à **12**. On complétera ainsi le polygone des forces en équilibre agissant sur la grue. Les lignes 10, 11, 12 donnent les tensions des barres **10, 11, 12**.

Cette construction préliminaire terminée, on construira la figure réciproque du nœud (**9, 10, 27, 26**). On connait déjà les réciproques des lignes **9** et **10**. Pour trouver la réciproque de **27**, on remarquera que cette ligne formant un triangle (*polygone fermé*) avec **10** et **11**, sa réciproque doit passer par le point (10, 11). De

même, 26 faisant partie d'un quadrilatère fermé dont font partie 9 et 8, sa réciproque doit passer par (9, 8).

On passera ensuite à la réciproque du nœud (27, 11, 12, 1, 24, 25) dont on connait toutes les lignes sauf celles 24 et 25. La première doit passer par (1, 2), puisque 24, 1 et 2 font partie d'un même quadrilatère fermé; la seconde doit passer par (26, 27), puisque 25, 26 et 27 forment un triangle fermé.

De là on passera à la réciproque du nœud (8, 26, 25, 23, 22), dont on connait tous les côtés sauf 23 et 22, qu'on construira d'après les mêmes règles, et ainsi de suite.

§ 122.

PONT TOURNANT. — La *fig.* 75 (*Pl. XVII*) représente un pont tournant autour de l'axe vertical xy. La partie placée à gauche de cette ligne est la volée; la partie de droite est la culasse destinée uniquement à faire contre-poids à la volée.

On se donne les forces verticales

1, 2, 3,..., 9, 10 (*)

agissant sur la volée. Il faut d'abord déterminer les forces

11, 12, 13, 14, 15, 16,

égales entre elles, à appliquer à la culasse pour que le système soit en équilibre, c'est-à-dire pour que la résultante de toutes les forces agissant tant sur la volée que sur la culasse coïncide avec xy.

Pour cela, portons bout à bout (*fig. a*) des longueurs d'une grandeur commune quelconque

11, 12, 13, 14, 15, 16.

Ces lignes représenteront, à une échelle indéterminée, les forces inconnues

11, 12, 13, 14, 15, 16.

qui sont supposées égales entre elles. En construisant le polygone

(*) Pour ne pas compliquer la figure, on suppose les forces condensées sur les nœuds 6, 7, 8, 9,..., au lieu de les supposer réparties sur tous les nœuds.

Digitized by Google

funiculaire relatif au pôle 0, on obtient la position de la résultante R de ces forces.

Construisons maintenant un polygone funiculaire relatif à un pôle 0′ (*fig.* 75) de R et des forces données agissant sur la volée. En partant d'un point de xy, ce polygone devra, comme au § 52, se fermer. On en déduit la grandeur de R. Chacune des six forces appliquées sur la volée sera $\frac{1}{6}$ de R, et la réaction sur l'appui xy sera une force ascendante 17 égale à la somme de toutes les forces agissant sur l'ensemble de la figure.

Les barres extrêmes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ont évidemment des tensions nulles.

Si une force verticale était appliquée à la barre α, elle représenterait la tension de cette barre, et la tension de β n'en serait pas moins nulle; de même, si une force verticale était appliquée suivant la barre γ, elle représenterait la tension de cette barre, et la tension de δ serait nulle.

Il n'y a donc pas à s'occuper de ces quatre barres α, β, γ, δ.

Cela posé, on peut construire la réciproque du nœud (6, 18, 19). On mènera pour cela par (6, 7) une parallèle à 19 et par (5, 6) une parallèle à 18.

On construira ensuite la réciproque du nœud (18, 20, 21); on a la réciproque de 18. Pour avoir 20, on mènera, par (18, 19), une parallèle à 20; et, pour avoir 21, on mènera par (5, 6) une parallèle à 21.

De là on passera au nœud (19, 20, 22, 23). On connaît les réciproques de 19 et 20. Pour avoir 22 et 23, on mènera par (6, 7) une parallèle à 23 et par (20, 21) une parallèle à 22.

On passera ensuite au nœud (21, 22, 24, 25), et ainsi de suite.

§ 123.

CAS DES CROIX DE SAINT-ANDRÉ. — Le beau pont tournant établi par M. Oudry à l'entrée du port de Brest a les mêmes dimensions géométriques que le système que nous venons d'étudier; mais il est formé de croix de Saint-André.

La Statique graphique, pas plus que la Statique ordinaire, ne permet de trouver rigoureusement les tensions d'un système de croix de Saint-André. Pour les obtenir d'une façon rigoureuse, il

faut faire usage de la théorie mathématique de l'élasticité et suivre la méthode développée dans le Mémoire (note II) qui fait suite à cet Ouvrage. Mais habituellement on regarde un système en croix de Saint-André comme agissant de la même manière que deux systèmes triangulés juxtaposés ayant : l'un, la forme de la *fig.* 75; l'autre, celle de cette même figure où les étrésillons seraient remplacés par des contre-étrésillons. Ces deux systèmes peuvent tous deux être traités par les procédés graphiques (*).

CHAPITRE XIV.

APPLICATION AUX DIVERSES ESPÈCES DE CHARPENTES POUR TOITURES.

§ 124.

CONSIDÉRATIONS SUR LES CHARGES QUE SUPPORTENT LES CHARPENTES POUR TOITURES. — Données sur les charges dues : 1° au poids propre d'une charpente et de la toiture; 2° au poids de la neige; 3° à la pression du vent. — Les charpentes en bois ou en métal sont en général destinées à porter, soit les couvertures des édifices, soit les voûtes en construction jusqu'à ce que, étant *fermées,* elles se soutiennent par elles-mêmes. Dans ce dernier cas, elles prennent le nom de *cintres*.

Les charpentes supportant les toitures ont à subir trois sortes de charges :

1° Leur poids propre et celui de la couverture des édifices;

2° Le poids des neiges qui peuvent accidentellement y séjourner;

3° La pression du vent.

Voici, sur ces trois espèces d'efforts, quelques indications expé-

---

(*) Nous démontrons, dans le Mémoire qui fait l'objet de la Note II, qu'il est plus avantageux d'employer des systèmes triangulés que des systèmes à croix de Saint-André, et qu'en général, dans toutes les constructions, les systèmes les meilleurs et les plus économiques sont ceux strictement indéformables, c'est-à-dire ceux qui peuvent être traités par les procédés de la Statique graphique.

Digitized by Google

rimentales qui, pour ne pas faire partie essentielle de la Statique graphique n'en sont pas moins utiles à connaître.

1° *Poids propre ou permanent.*

A. *Charpentes en bois.*

Nos d'ordre.	NATURE DE LA COUVERTURE.	CHARGE par mètre carré.	OBSERVATIONS.
1	Couverture simple en tuiles.....	100kg	
2	» double..... ...	125	
3	» en ardoises..... ..	75	
4	» en asphalte.....	60 à 100	Suivant la nature des lambourdes.
5	» en goudron.....	30	
6	» en tôle de zinc ou de fer..	40	

B. *Charpentes métalliques.*

Nos d'ordre.	NATURE DE LA COUVERTURE.	CHARGE par mètre carré.	OBSERVATIONS.
1	Ardoises sur cornières.....	50kg	
2	Tôle de fer plane sur cornières	25	
3	» ondulée sur cornières....	22	
4	Tôle de zinc ondulée sur cornières...	24	

2° *Charge due à la neige.*

La plus grande hauteur des chutes de neige dans l'Europe centrale est d'environ $0^m,625$. La densité de la neige qui tombe étant $\frac{1}{8}$ environ de celle de l'eau, la plus grande charge due à la neige équivaut à celle d'un volume d'eau de $\frac{0^m,625}{8} = 0^m,078$ de hauteur. Elle est donc de 78 kilogrammes par mètre carré de surface

horizontale couverte. Cette pression, si a est la portée de la charpente et h sa flèche ou hauteur, sera réduite, si on la compte (*fig.* 77, *Pl. XVIII*) suivant la surface inclinée AB du toit, dans le rapport $\frac{a}{2\sqrt{\frac{a^2}{4}+h^2}}$, c'est-à-dire que, par mètre carré de couverture inclinée, elle sera de $\frac{78 \times a}{2\sqrt{\frac{a^2}{4}+h^2}} = \frac{78}{\sqrt{1+\frac{4h^2}{a^2}}}$ kilogrammes.

On trouve les résultats suivants :

$\frac{h}{a}$	Charge de neige par mètre carré de toiture.
$\frac{1}{2}$	55^{kg}
$\frac{1}{3}$	65
$\frac{1}{4}$	70
$\frac{1}{5}$	73
$\frac{1}{6}$	74
$\frac{1}{7}$	75
$\frac{1}{8}$	75,5
$\frac{1}{9}$	76
$\frac{1}{10}$	77

3° *Pression du vent.*

Lorsque le vent souffle normalement à une surface avec une vitesse V, la pression normale p qu'il exerce sur 1 mètre carré de cette surface est

$$p = 0,113\,V^2,$$

p étant exprimé en kilogrammes et V en mètres.

Soit, d'après cela (*fig.* 78, *Pl. XVIII*), AB un versant de toit ayant une inclinaison α.

Le vent fait généralement un angle de 10 degrés avec l'horizontale.

Si v est sa vitesse normale à AB

$$v = V \sin(\alpha + 10^\circ),$$

et la pression normale qu'il exerce par mètre carré sera

$$p = 0,113\, V^2 \sin^2(\alpha + 10).$$

On peut admettre, pour la plus grande vitesse du vent $V = 31^m,6$, d'où $V^2 = 1000$ environ, et la formule précédente devient

$$p = 113 \sin^2(\alpha + 10),$$

où α est donné par l'expression $\tang \alpha = \frac{2h}{a}$.

Cette force doit être composée avec les forces verticales resultant du poids de la toiture et avec la charge verticale produite par la neige.

On peut, si l'on veut, la décomposer en une force dirigée suivant AB et une force verticale

$$q = \frac{113 \sin^2(\alpha + 10^\circ)}{\cos \alpha},$$

laquelle s'ajoutera aux deux précédentes. On trouve

$\frac{h}{a}$.	q.
	kg
$\frac{1}{2}$	107,20
$\frac{1}{3}$	64,75
$\frac{1}{4}$	44,65
$\frac{1}{5}$	33,90
$\frac{1}{6}$	27,10
$\frac{1}{7}$	22,45
$\frac{1}{8}$	19,30
$\frac{1}{9}$	17,00
$\frac{1}{10}$	15,02

Et, en ajoutant les trois charges verticales, on trouve :

Charge totale s'exerçant suivant la verticale sur un mètre carré de toiture et provenant du poids propre de la toiture, de celui de la neige et de la composante verticale q de la pression du vent.

NATURE DE LA COUVERTURE.	$\frac{h}{a}$. $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	OBSERVATIONS.
Forme en bois (en kilogrammes).										
Couverture simple en tuiles.....	260	230	215	"	"	"	"	"	"	
Id. double Id.	285	255	240	"	"	"	"	"	"	
Id. en ardoises..... ..	235	205	180	180	"	"	"	"	"	
Id. en asphalte..... ..	235 à 260	205 à 230	180 à 215	180 à 205	175 à 200	170 à 195	170 à 195	165 à 190	165 à 190	Suivant la nature des lambourdes.
Id. en goudron.....	190	160	145	135	130	125	125	120	120	
Id. tôle de zinc ou de fer.	200	170	155	145	140	135	135	130	130	
Forme métallique (en kilogrammes).										
Ardoises sur cornières..... ...	212	180	165	175	151	148	145	143	142	
Tôle de fer plane sur cornières..	187	155	140	132	126	123	120	118	117	
Id. ondulée Id.	184	152	137	129	123	120	117	115	114	
Id. de zinc ondulée Id.	186	154	139	131	125	122	119	117	116	

Une fois qu'on a trouvé par les règles qui précèdent la charge totale qui s'exerce par mètre carré, sur une toiture, en multipliant cette charge par l'espacement des fermes, on aura celle qui s'exerce par mètre courant de ferme ; on en déduira les forces à appliquer en chaque sommet ou nœud, en multipliant la charge par mètre courant de ferme, par la demi-somme des distances du nœud considéré aux deux nœuds voisins.

On trouvera d'ailleurs les réactions des appuis par les procédés exposés au Chapitre VI, et il ne restera qu'à déterminer les forces dites *intérieures*, c'est-à-dire les tensions des diverses pièces de la charpente.

Nous allons résoudre la question pour les divers types de charpentes usités.

Digitized by Google

§ 125.

PREMIER TYPE. — Considérons un premier type (*fig.* 79, *Pl. XVIII*) formé de deux arbalétriers, deux sous-arbalétriers se croisant et un poinçon.

Soient 1, 2, 3 les charges et 4 et 5 les réactions des appuis; ces forces sont supposées verticales et représentées sur le polygone des forces (*fig.* 79) par les lignes doubles 1, 2, 3, 4, 5.

On construira le triangle réciproque du nœud (5, 6, 7). Si le polygone funiculaire était tracé, il est clair que 5 et 6 feraient partie, avec 1, d'un quadrilatère fermé, et 5 et 4 d'un pentagone fermé, avec 7 et 12. Donc par (5, 1) on mènera une parallèle à 6, et par (5, 4) une parallèle à 7.

On passera au nœud (1, 6, 9, 8). On connait les lignes réciproques de 1 et 6. Par (1, 2) on mènera une parallèle à 9 et, par (6, 7) une parallèle à 8 (car, 6, 7, 8 formant un polygone fermé, 6, 7, 8 forment un nœud).

On passera ensuite au nœud (2, 9, 14, 10). On connait les réciproques des lignes 2 et 9. Par (2, 3) on mènera une parallèle à 10; par (8, 9) une parallèle à 14.

On pourra ensuite construire la réciproque du nœud à cinq côtés (7, 8, 14, 11, 12). C'est un pentagone dont on connait les trois côtés 7, 8 et 14. Par (10, 14) on mène une parallèle à 11; par (4, 5) une parallèle à 12 (puisque 12 fait partie d'un polygone fermé avec 4, 5 et l'un des côtés du polygone funiculaire, si l'on conçoit ce polygone tracé).

§ 126.

DEUXIÈME TYPE (allemand ou suisse). — La *fig.* 82, 82 donne un autre type usité en Allemagne et en Suisse.

Les charges sont 1, 2, 3; les réactions des appuis 4 et 5. Ces cinq forces sont représentées par la double ligne formant le polygone des forces.

On construit le triangle réciproque du nœud (5, 6, 7). Pour cela, par (5, 1) on mène une parallèle 6, et par (5, 4) une parallèle à 7.

De là on passe au nœud (6, 1, 8, 9); de là au nœud (9, 10, 2, 11);

Digitized by Google

puis au nœud à cinq lignes (7, 8, 10, 12, 14). Le tracé est le même que celui de la figure précédente.

§ 127.

TROISIÈME TYPE. — La *fig.* 80, 80 (*Pl. XVIII*) donne un type de charpente très-simple et très-élégant usité en France et en Angleterre.

La charge est concentrée en 1 ; les réactions des appuis sont 2 et 3. Ce type ne s'applique que si l'on donne aux arbalétriers assez de section pour qu'ils résistent à la flexion provenant de ce que la charge est en réalité répartie sur toute leur longueur, sans point d'appui intermédiaire.

La double ligne 1, 2, 3 donne le tracé du polygone des forces. Par (3, 1) on mène une parallèle à 4; par (3, 2) une parallèle à 5. On passe de là au nœud (5, 6, 7). Par (4, 5) on mène une parallèle à 6; par (3, 2) une parallèle à 7.

Puis on passe au nœud (1, 4, 6, 8, 10) de la réciproque duquel on connait tous les côtés, sauf les deux derniers. Par (6, 7), on mène une parallèle à 8; par (1, 2) une parallèle à 10.

§ 128.

QUATRIÈME TYPE (anglais). — La *fig.* 84, 84 (*Pl. XIX*) représente un type applicable à de grandes portées et particulièrement usité en Angleterre.

Les charges sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; les réactions des appuis, 8 et 9. Toutes ces lignes sont indiquées en grandeur sur la double ligne formant polygone des forces de la *fig.* 84. Par (9, 1) on mène une parallèle à 10; par (9, 8) une parallèle à 11. On aura ainsi le triangle réciproque du nœud (9, 10, 11).

Par (1, 2), une parallèle à 13; par (10, 11), une parallèle à 12, ce qui donnera la réciproque du nœud (1, 10, 12, 13); de là on passera au nœud (11, 12, 14, 15); puis à celui (2, 13, 14, 16, 17), et ainsi de suite.

Il n'y a aucune ambiguïté dans le tracé des lignes de la figure réciproque, si l'on se rappelle : 1° que chacun des côtés de la charpente fait partie d'un ou de deux triangles; que les trois côtés de chacun de ces triangles ont pour réciproques des lignes concou-

Digitized by Google

rantes; 2° que chacune des lignes d'action des charges fait partie, si l'on suppose tracé le polygone funiculaire, de quadrilatères fermés, sauf les lignes 8 et 9, qui, avec les sous-arbalétriers et le côté du polygone funiculaire qui les unit, font partie d'un polygone fermé de neuf côtés, trois de ces côtés 11, 15 et 19 étant sur une ligne droite et trois autres, 25, 29, 33, sur une autre ligne droite.

Quand on aura tracé la figure réciproque du nœud (3, 17, 18, 20, 21), on devra passer au nœud (4, 21, 22, 23), et ce n'est qu'ensuite qu'on passera à celui (19, 20, 22, 21, 25) qui contient un côté de plus que le précédent.

§ 129.

CINQUIÈME TYPE (français). — La *fig.* 81, 81 (*Pl. XVIII*) représente le type usité en France pour les grandes charpentes comme celles des gares de chemins de fer.

Sur la ligne double verticale formant polygone des forces (*fig.* 81) sont portées les grandeurs des charges 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et les réactions verticales 8 et 9.

On construira successivement les figures réciproques des nœuds (9, 10, 11), (1, 10, 12, 13), (11, 12, 14, 15).

Mais ensuite, soit que l'on passe au nœud (2, 13, 14, 16, 18, 17), soit à celui (15, 16, 19, 23), on aura toujours trois lignes inconnues et le tracé des polygones réciproques de ces nœuds est indéterminé.

Il y a lieu dès lors de se demander si la figure n'est pas de celles dont la Statique ne permet pas de trouver les tensions. En comptant le nombre n de ses sommets et le nombre m de ses côtés, on trouve

$$n = 15, \quad m = 27,$$

d'où

$$m = 2n - 3.$$

La figure est donc strictement indéformable et, par suite (§ 72), la Statique doit suffire à trouver les tensions de ses barres, puisqu'on connaît les réactions des appuis.

Pour résoudre le problème, faisons une section xy un peu à gauche du sommet de la ferme. Elle coupera les trois barres 20, 22, 23. La partie de gauche devra être en équilibre sous l'action des forces

9, 1, 2, 3

qui y agissent et de trois forces fictives tenant lieu des tensions des barres coupées et dirigées suivant ces barres. Donc le problème de la détermination de ces tensions consiste à trouver trois forces dirigées suivant des lignes données non concourantes et faisant équilibre à des forces données. Nous avons résolu ce problème général au § 57 et le cas particulier dont il s'agit ici au § 57 *bis*. On le résoudra donc, et alors toute difficulté, dans la construction de la *fig.* 81, disparaitra, et cela quelles que soient les charges, quand bien même elles ne seraient ni verticales, ni symétriques par rapport à la verticale passant par le sommet de la ferme.

Remarque. — On voit que nous faisons ici application du procédé général indiqué à la fin du paragraphe 111.

§ 130.

SIXIÈME TYPE. — La *fig.* 83 (*Pl. XIX*), empruntée comme plusieurs de nos figures à l'Ouvrage de M. Cremona, indique une charpente portant à sa partie supérieure une lanterne. Il en résulte que le sommet de la charpente est libre et ne supporte que la charge verticale 1.

Les charges données 1, 2, 3, 4, 5 sont tenues en équilibre par les réactions des appuis 6 et 7. Ces réactions se déterminent par les procédés ordinaires, c'est-à-dire par le tracé d'un polygone funiculaire. Ce polygone est indiqué sur la figure. Le tracé de la figure réciproque 83 n'offre d'ailleurs aucune difficulté.

CHAPITRE XV.

APPLICATION AUX CINTRES DES VOUTES ET A DES CHARPENTES DIVERSES.

§ 131.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LE FROTTEMENT. — Considérons (*fig.* 85, *Pl. XIX*) un corps (A) reposant sans adhérence sur un plan xy. Nous avons vu (§ 53) que la réaction de chacun des points d'appui

du plan sera normale à ce plan, en sorte que la résultante des réactions de tous les points d'appui, quel qu'en soit le nombre, sera aussi normale à xy.

Ces réactions sont d'ailleurs toutes dirigées dans le même sens, dans un sens tel qu'elles s'opposent à ce que le plan soit traversé par le corps. Leur résultante sera donc dirigée dans le même sens et comprise entre les points d'appui.

Pour que le corps (A) puisse être en équilibre, il faut que la résultante R des forces qui agissent sur lui soit égale et contraire à celle des réactions du plan. Cette force devra donc : 1° être normale au plan xy; 2° tendre à appuyer le corps contre le plan; 3° son point d'intersection avec le plan devra se trouver à l'intérieur du périmètre formé par les points d'appui.

D'après cela, si la résultante R des forces agissant sur le corps (A), au lieu d'être dirigée suivant une normale au plan xy, a une direction oblique R′, le corps (A) glissera sur le plan.

Cela suppose, toutefois, que les surfaces en contact sont d'un poli *parfait*. En réalité, cela n'est pas. L'expérience prouve que, si les corps en contact sont des solides naturels, le glissement ne s'effectue que si l'inclinaison de R′ sur la normale atteint ou dépasse une certaine valeur φ. Cette valeur est indépendante de la grandeur de R′, indépendante de l'étendue des surfaces en contact; elle ne dépend que de la nature de ces surfaces et se nomme l'*angle de frottement de l'une des surfaces sur l'autre*.

De ce que le corps (A) demeure en équilibre tant que la résultante R′ des forces qui agissent sur lui fait, avec la normale, un angle φ' moindre que l'angle du frottement φ, il résulte que le plan xy fait alors naître une réaction R″ exactement égale et contraire à R′. Ainsi, *si un corps naturel s'appuie sur la surface d'un autre corps naturel, celle-ci peut lui opposer une résistance oblique dont l'inclinaison sur la normale peut prendre toutes les valeurs comprises entre zéro et un certain angle φ appelé l'angle de frottement*. La composante de la réaction parallèle à la surface est le *frottement;* la composante normale à la surface conserve le nom de *réaction normale*. Le rapport du frottement à la réaction normale est évidemment égal à la tangente trigonométrique de l'inclinaison de la réaction sur la normale. Ce rapport peut varier depuis o jusqu'à tangφ; cette dernière quantité est ce que

l'on nomme le *coefficient de frottement* des deux surfaces en contact; nous le désignerons habituellement par la lettre f, en sorte que $f = \tang \varphi$; quand le corps (A) est sur le point de glisser, si N est la pression normale qu'il exerce sur xy, le frottement que fera naître cette pression sera ainsi égal à fN.

§ 132.

RECHERCHE DE L'ACTION EXERCÉE PAR UNE VOUTE EN COURS DE CONSTRUCTION SUR SON CINTRE. — Les voûtes se construisent en posant sur cintre les voussoirs, à partir des deux naissances à la fois, jusqu'à la clef. On pose ensuite le voussoir de clef qu'on chasse comme un coin entre les voussoirs voisins, de façon à le serrer le plus possible; la voûte est alors terminée; elle se tient d'elle-même et l'on peut enlever les cintres; mais, tant que la clef n'est pas posée, elle est exclusivement portée par les cintres.

Le problème que nous nous proposons de résoudre est celui-ci :

Quelles sont les pressions exercées par les divers voussoirs sur le cintre au moment où l'on va poser la clef ou, plus généralement, à un moment quelconque de la construction d'une voûte, par exemple, lorsqu'on a construit la partie $xx'yy'$ (*fig.* 86, *Pl. XIX*)?

Considérons un voussoir quelconque *abcd* et cherchons l'action que ce voussoir exerce sur le cintre. Chaque voussoir repose sur le cintre par l'intermédiaire d'un couchis k passant en son milieu. Nous pouvons regarder l'action cherchée comme passant par le centre de ce couchis. Cette action est d'ailleurs normale à l'intrados; elle est donc dirigée suivant la ligne médiane gX du voussoir. Nous en connaissons ainsi la position, et c'est sa grandeur seulement que nous avons à déterminer.

Nous pouvons concevoir enlevée la partie de la voûte placée au-dessus du joint *cd*, pourvu que nous remplacions l'action qu'elle exerce sur ce joint par une force fictive q qui lui soit égale. Supposons pour un instant cette force connue en grandeur et en position; je dis qu'on en pourra déduire : 1° la force analogue q' relative au joint *ab*, c'est-à-dire l'action exercée sur ce joint par la partie de la voûte située au-dessus de lui; 2° l'action cherchée X de la voûte sur le cintre au point k.

En effet, composons l'action supposée connue q avec le poids p

Digitized by Google

du voussoir; soit r la résultante de ces deux forces et o le point d'intersection de cette résultante avec la ligne gX, suivant laquelle est dirigée l'action cherchée X.

Il peut se présenter deux cas : la partie de la voûte placée au-dessus du joint ab peut tendre à se détacher de la partie placée au-dessous, de deux manières : soit en glissant le long du joint ab, soit en tournant autour de l'arête d'intrados b. Dans la première hypothèse, l'action inconnue q' exercée par $abyy'$ sur le joint ab serait connue en direction; car elle ferait, avec la normale à ab, un angle égal à l'angle du frottement de la pierre sur la pierre (§ 131), angle que l'on admet, d'après l'expérience, être généralement de 15 degrés pour les voûtes en maçonnerie (*). Dans la seconde hypothèse, l'action q ne serait pas connue en direction, mais on connaitrait un point de sa ligne d'action ; car cette force passerait nécessairement par le point b.

D'après cela, voici la marche à suivre pour avoir à la fois les forces q' et X. On décomposera la force r en deux : l'une suivant la ligne oX dont la position est connue, l'autre suivant la ligne oq' passant par o et formant un angle de 15 degrés avec la normale au joint ab. Si cette ligne oq' coupe le joint ab entre les points a et b, la composante de r dirigée suivant cette ligne sera l'action cherchée q' sur ce joint, et la composante suivant oX sera l'action exercée en k sur le cintre. Dans ce cas, on sera bien certain que c'est par glissement que la partie de la voûte située au-dessus de ab tend à se détacher du reste.

Si, au contraire, la ligne oq' coupait la ligne ab dans le prolongement de la portion ab, alors on serait au contraire assuré que ce n'est pas par glissement, mais par rotation autour du point b, que le mouvement de la portion $abyy'$ de la voûte tendrait à se produire; on devrait donc décomposer la force r en deux : l'une suivant oX et l'autre suivant ob. La première des composantes donnerait l'action sur le cintre, la seconde l'action q'' sur le joint ab.

Ainsi, dans tous les cas, étant connue l'action q exercée sur un joint cd, on en peut conclure : 1° l'action analogue (q' ou q'') exer-

(*) Nous n'avons pas ici à tenir compte de l'adhérence des mortiers, puisqu'ils n'ont pas encore fait prise au moment où nous étudions les actions mécaniques qui se développent dans la voûte.

cée sur le joint suivant ab, ainsi que l'action exercée sur le cintre par le voussoir compris entre ces deux joints.

Or, en partant du dernier voussoir posé $mnyy'$, l'action exercée sur le joint yy' est $q = 0$. Elle est donc connue. On pourra par suite trouver : 1° l'action exercée sur le cintre par le dernier voussoir ; 2° l'action exercée sur le joint mn.

Connaissant cette dernière, on en peut déduire l'action exercée sur le cintre par l'avant-dernier voussoir ainsi que l'action exercée sur le joint suivant $m'n'$, et, en continuant ainsi de proche en proche, on aura l'action exercée sur le cintre au droit de chacun des voussoirs de la voûte.

Il est à peine besoin d'ajouter que toutes ces recherches se font graphiquement avec la plus grande facilité, au moyen du polygone des forces et du polygone funiculaire. On portera bout à bout les forces p et q; puis, par l'une des extrémités du contour ainsi obtenu, on mènera une parallèle à oX ; par l'autre, une parallèle à oq' si cette ligne tombe entre a et b et à oq'' dans le cas contraire; on aura ainsi en grandeur les forces cherchées X et q' (ou q'') sur le polygone des forces. La première est d'ailleurs connue en position; la construction d'un polygone funiculaire quelconque donne la position de la seconde.

§ 133.

RECHERCHE DES TENSIONS DANS LES CHARPENTES FORMANT CINTRE. — Maintenant que nous savons trouver les charges qu'une voûte exerce sur son cintre, étudions les pressions ou tensions que ces charges font naître dans les diverses pièces composant le cintre.

Premier type. — La *fig.* 87, 87 (*Pl. XIX*) représente un cintre de voûte en plein cintre. Les charges données ou plutôt obtenues par le procédé du paragraphe précédent sont

1, 2, 3, 4, 5;

les réactions des appuis sont 6 et 7 ; ces diverses forces sont représentées sur le polygone des forces par

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

On construit la réciproque du nœud (7, 8, α). On voit facilement que la réciproque de α est nulle, c'est-à-dire que, théoriquement, cette

Digitized by Google

barre ne supporte pas de tension, elle sert simplement à s'opposer au *déversement* du système. La tension de 8 est égale et opposée à la réaction de l'appui 7. On passe au nœud (8, 1, 9, 10); on connaît 8 et 1, et l'on obtient 10 en menant par (1, 2) une parallèle à 10, et 9 en menant par (7, 6) une parallèle à 9. De là on passe au nœud (2, 11, 12, 10).

On connaît 2 et 10; on trouve 12 en menant par (2, 3) une parallèle à 12, et 11 en menant par (9, 10) une parallèle à 11, et ainsi de suite.

§ 134.

Type pour voûte en anse de panier ou en arc de cercle. — Les *fig.* 88, 88 (*Pl. XX*) représentent un type pour pont en arc de cercle ou en anse de panier.

La figure réciproque se construit sans difficulté.

§ 135.

Type pour voûte en arc très-surbaissé. — Les *fig.* 91, 91 (*Pl. XX*) donnent un type applicable à une voûte en arc de cercle très-surbaissé.

§ 136.

Types divers. — Les *fig.* 89, 90, 92 de la *Pl. XX* représentent trois autres types de charpente pouvant servir soit pour toitures, soit pour cintres. Elles sont empruntées à M. Feeming Jenkins.

Les *fig.* 89, 90, 92 en sont les réciproques que l'on construit sans difficulté; les procédés sont toujours les mêmes. Cette uniformité dans les procédés constitue un des plus précieux avantages de la Statique graphique. Une fois qu'on a construit un certain nombre de figures réciproques, on les construit toutes sans la moindre difficulté.

Les exemples que nous avons donnés sont assez nombreux et assez variés pour que le lecteur ne rencontre plus guère de difficultés dans la pratique.

CHAPITRE XVI.

APPLICATION A LA DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES EFFORTS TRANCHANTS ET DES MOMENTS FLÉCHISSANTS.

§ 137.

DÉFINITION DES EFFORTS TRANCHANTS ET DES MOMENTS FLÉCHISSANTS. — La détermination des dimensions à donner aux pièces chargées (*poutres pleines ou arcs pleins*), que l'on étudie en Résistance des matériaux, dépend de la connaissance de deux éléments qu'on nomme les *efforts tranchants* et les *moments fléchissants*.

Habituellement ces pièces sont symétriques par rapport à un plan vertical contenant leur fibre moyenne, et les charges qu'elles supportent sont des forces verticales situées dans ce plan.

L'effort tranchant relatif à une section transversale faite dans une telle pièce est la projection, sur le plan de cette section, de la résultante des forces qui agissent entre elle et l'une des extrémités de la pièce.

Le moment fléchissant est le moment de cette même résultante par rapport au point où la section considérée coupe la fibre moyenne.

§ 138.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR TROUVER GRAPHIQUEMENT LES EFFORTS TRANCHANTS ET LES MOMENTS FLÉCHISSANTS. — Les efforts tranchants et les moments fléchissants peuvent se déterminer graphiquement toutes les fois qu'on a trouvé, d'après les procédés de la Statique graphique ou, à leur défaut, d'après les principes de la Résistance, les réactions des appuis sur lesquels porte la pièce. Les efforts tranchants sont directement fournis par le polygone des forces, et les moments fléchissants le sont par le procédé des §§ 67 et 68. Faisons-en une application aux deux cas usuels d'une poutre droite et d'un arc soumis à des charges verticales.

Digitized by Google

§ 139.

APPLICATION AUX POUTRES DROITES PORTANT DES CHARGES VERTICALES. — THÉORÈME. — *Le moment fléchissant, relatif à une section faite dans une poutre droite horizontale soumise à des charges verticales quelconques, est la portion d'ordonnée que cette section découpe dans un polygone funiculaire dont le pôle est distant, d'une longueur égale à l'unité, de la verticale représentant le polygone des forces.*

En effet, soit (*fig.* 93, *Pl. XXI*) une poutre soumise à des forces verticales quelconques 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, les unes ascendantes, les autres descendantes, le nombre et les intensités des forces dirigées dans chaque sens pouvant d'ailleurs être quelconques. Supposons qu'on ait construit le polygone funiculaire 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′ 7′ 8′ 1′ relatif à un pôle O situé à une distance OP, égale à l'unité de longueur, de la verticale figurant le polygone des forces (*fig.* 93). Il s'agit de déterminer le moment fléchissant relatif à la section quelconque $\alpha\beta$ faite dans la poutre. Je dis que ce moment est l'ordonnée $ab = y$ que la verticale $\alpha\beta$ prolongée détermine dans le polygone funiculaire.

En effet, le point d'application de la résultante R des forces agissant entre la section $\alpha\beta$ et l'une des extrémités de la poutre, par exemple l'extrémité gauche, est le point d'intersection I des côtés 1′2′ et 7′8′ du polygone funiculaire. Cette résultante est verticale et égale à la longueur $\omega C = 8 - 1$ prise sur le polygone des forces. Le moment fléchissant est, par définition, le produit $R \times Ii$ de la résultante R par sa distance à la verticale $\alpha\beta$. Or, les triangles $O\omega C$ et Iab étant semblables, leurs bases sont entre elles comme leurs hauteurs.

D'où

$$\frac{\omega C}{OP} = \frac{ab}{Ii}$$

ou, puisque OP est l'unité de longueur,

$$R = \frac{ab}{Ii}$$

ou

$$R \times Ii = ab,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — La construction qui précède donne le moment relatif à une droite $\alpha\beta$ du système des forces parallèles 1, 2, 3,.... Ce moment (§ 77) ne change pas si l'on fait tourner ces forces autour de leurs points d'application respectifs sans qu'elles cessent d'être parallèles, alors même que ce mouvement aurait pour effet de faire sortir les forces données du plan qui les contient. On peut donc dire que la construction qui précède fournit le moment de la résultante d'un système de forces parallèles, situées *ou non* dans un même plan, pourvu que leurs points d'application soient dans un plan, relativement à une droite de ce plan.

Quant aux efforts tranchants, ce sont, par définition, les longueurs du polygone des forces comptées à partir de son origine ω.

En les reportant en face des sections auxquelles elles se rapportent, on obtient la ligne brisée marquée en traits pleins sur la *fig.* 93 et, pour une section quelconque $\alpha\beta$, l'ordonnée $y'y''$ de cette ligne brisée, comptée à partir de l'horizontale $\omega\omega'$ émanée de l'origine du polygone des forces, est l'effort tranchant.

§ 140.

APPLICATION AUX ARCS PORTANT DES CHARGES VERTICALES. — Supposons qu'il s'agisse d'un arc ou d'une portion d'arc (*fig.* 100, *Pl. XXII*); les charges qui y sont appliquées sont encore verticales; mais les deux réactions des culées ou, plus généralement, les réactions des sections extrêmes de la portion de l'arc considérée sont inclinées, en sorte que le polygone des forces comprendra une ligne verticale et deux côtés inclinés (*fig.* 100).

La résultante de translation des forces comprises entre une section quelconque $\alpha\beta$ et l'extrémité gauche de la pièce est immédiatement donnée sur le polygone des forces : c'est le rayon I*u* ou I23, issu du point I d'intersection des deux côtés inclinés de ce polygone.

On aura donc sans difficulté la composante de cette force parallèle à $\alpha\beta$, c'est-à-dire l'effort tranchant, ainsi que la composante perpendiculaire à $\alpha\beta$, qu'il est, en général, aussi utile de connaître.

Pour avoir le moment fléchissant dans la section $\alpha\beta$, c'est-à-dire le moment, par rapport au point g où $\alpha\beta$ coupe la fibre moyenne, de la résultante des forces 8, 1, 2, comprises entre $\alpha\beta$ et l'extrémité

gauche de la pièce, on pourrait tout simplement appliquer le procédé du § 68; mais il est peut-être plus commode d'employer le suivant :

Soit A un point quelconque de la ligne d'action 8; par ce point, menons une horizontale rencontrant en A′ la ligne d'action 7.

Décomposons la réaction 8 en deux forces passant par A, l'une 8′ verticale, l'autre 8″ horizontale.

Faisons la même décomposition sur la réaction 7 supposée appliquée en A′, de façon à obtenir les composantes 7′ et 7″.

Les forces agissant sur l'arc étant en équilibre, la projection de leur somme sur la ligne AA′ est nulle, c'est-à-dire que les deux forces 7″ et 8″ sont égales et opposées, et l'ensemble des forces verticales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7',\ 8'$$

forme, de son côté, un système en équilibre dont le polygone des forces est (*fig.* 100) formé par les lignes

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7',\ 8'$$

et a pour origine le point ω projection de I sur la verticale ZZ′.

Soit O un point distant de ZZ′ d'une longueur égale à l'unité. Si nous construisons le polygone funiculaire $Bk_0k_1k_2k_3k_4k_5k_6B'B$, relatif au pôle O, des forces verticales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7',\ 8',$$

la somme des moments autour d'un point quelconque g de la fibre moyenne des forces verticales 8′, 1, 2 comprises entre ce point et l'extrémité gauche de la pièce sera (§ 139) l'ordonnée kj, que la verticale du point g détermine dans ce polygone. Donc, pour avoir le moment fléchissant relativement à la section $\alpha\beta$ passant par le point g, il suffira, d'après la définition de ce moment, et en vertu de ce que le moment de la résultante d'un système de forces est égal à la somme des moments de ces forces, d'ajouter à la longueur kj celle qui représente, en grandeur et en signe, le moment de la force unique 8″ relativement à g; ce moment est négatif, puisque la force 8″ tend à faire tourner son bras de levier en sens contraire de celui dans lequel se meuvent les aiguilles d'une montre; le moment de la résultante des forces verticales 8′, 1, 2 est, au con-

traire, positif; en effet, pour avoir un point de cette résultante et, par suite, sa position, puisqu'elle est verticale, il suffit de prolonger le côté $k_2\,k_3$ du polygone funiculaire jusqu'à sa rencontre avec la ligne BB′ qui ferme ce polygone; ce point de rencontre tombe à gauche du point g; donc la résultante est elle-même à gauche de ce point; elle est d'ailleurs ascendante, puisqu'elle est égale à la ligne ascendante ωu du polygone des forces; donc elle tend à faire tourner son bras de levier autour de g dans le sens des aiguilles d'une montre et son moment est positif; par suite, on devra de ce moment *retrancher* celui de la force 8″.

Pour avoir le moment de la force 8″, c'est-à-dire le produit $8'' \times gi$ ou $\omega u \times gi$, il suffit, par application du procédé exposé au § 67, de prendre, sur la verticale ZZ′, une longueur $\omega\omega'$ égale à l'unité, de joindre ω'I et, par le point A, de mener une parallèle AK à ω'I.

Si par le point g on mène une horizontale, elle déterminera dans l'angle KAV un segment mn égal au moment cherché. En portant sur l'ordonnée kj une longueur $kk' = mn$, la ligne $k'j$ représentera le moment fléchissant cherché.

Il résulte de là que, pour avoir les moments fléchissants dans les diverses sections d'un arc, il suffira de suivre la règle très-simple que voici : 1° par les points $g_0, g_1, g_2, \ldots$ d'application des charges, menez des verticales qui déterminent, dans le polygone funiculaire des forces verticales

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7′, 8′,

des segments k_0j_0, k_1j_1, $k_2j_2, \ldots$.

2° Par les mêmes points g_0, g_1, $g_2, \ldots$, menez des horizontales qui déterminent, dans l'angle KAV, d'autres segments.

3° Portez ces nouveaux segments sur les premiers, à partir des points k_0, k_1, $k_2, \ldots$ du polygone funiculaire, ce qui détermine un nouveau polygone $k'_0k'_1k'_2\ldots k'_6$. Les ordonnées k'_0j_0, k'_1j_1, $k'_2j_2, \ldots$, et généralement $k'j$ de ce nouveau polygone, comptées à partir de la ligne BB′ qui ferme le polygone funiculaire, fournissent les moments fléchissants dans toutes les sections.

Toute cette construction demande moins de temps à effectuer qu'il n'en faut pour la décrire.

De plus, les moments fléchissants sont positifs ou négatifs, suivant que les ordonnées $k'j$ tombent d'un côté ou de l'autre de la

ligne BB'. Aux points d'intersection du polygone $k'_0\ k'_1 \ldots k'_6$ avec la ligne BB', les moments fléchissants sont nuls.

Nota. — Si les forces se succédaient d'une manière continue, les divers polygones considérés seraient remplacés par des courbes ; mais on peut toujours, dans les applications, remplacer des forces se succédant d'une manière continue par des forces isolées suffisamment rapprochées. Les données des problèmes de la Résistance des matériaux ne sont jamais assez précises pour qu'une telle substitution puisse présenter le moindre inconvénient, et il est plus correct et plus simple de tracer des polygones que de tracer des courbes dont la construction ne peut d'ailleurs jamais se faire que par points.

CHAPITRE XVII.

APPLICATION A LA DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES MOMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR DES FORCES PARALLÈLES DONT LES POINTS D'APPLICATION SONT SITUÉS DANS UN MÊME PLAN ET PARTICULIÈREMENT A LA DÉTERMINATION GRAPHIQUE ET A L'ÉTUDE DES MOMENTS D'INERTIE DES AIRES PLANES.

§ 141.

DÉFINITION ET DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES MOMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR QUI FONT L'OBJET DE CE CHAPITRE. — Nous avons défini (§ 77) les moments des forces parallèles dont les points d'application sont situés dans un plan, relativement à une droite de ce plan, les produits de ces forces par leurs distances à la droite, et nous avons vu que le moment ainsi défini de la résultante d'un système de forces est égal, si l'on fait certaines conventions sur les signes des moments, à la somme algébrique des moments de ses composantes. Nous avons, de plus, donné au § 139 le moyen de construire graphiquement le moment de la résultante d'un système de forces parallèles dont les points d'application sont situés dans un plan, relativement à une droite de ce plan. Ainsi, dans les *fig.* 93 et 93, les forces données supposées ramenées, comme on peut toujours le faire, dans le plan qui contient leurs points d'application, ont pour lignes d'action

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

et pour grandeurs

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Le moment de la résultante, relativement à la ligne $\alpha\beta$, de toutes celles qui sont à gauche de $\alpha\beta$ est ab; le moment de la résultante des forces 1, 2, 3, 4, 5, relativement à $\alpha\beta$, serait le segment dc que les côtés extrêmes du polygone funiculaire de ces cinq forces déterminent sur la ligne $\alpha\beta$, et ainsi de suite.

Soient généralement

$$P_1,\quad P_2,\quad P_3,\quad P_4, \ldots,\quad P_i, \ldots,\quad P_n$$

des forces données ayant pour lignes d'action les lignes

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

de la *fig.* 93 et pour grandeurs les lignes

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

de la *fig.* 93.

Soient

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_i, \ldots, x_n$$

les distances de leurs points d'application à la droite $\alpha\beta$: si la ligne ba est le moment de la résultante obtenu graphiquement, cette ligne représente aussi la somme des moments des composantes, c'est-à-dire que l'on aura

$$(a) \qquad ba = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots + P_nx_n.$$

Les *fig.* 93 et 93 ne fournissent pas seulement le second membre de cette égalité, mais aussi, si on le veut, chacun des termes qui le composent.

Veut-on avoir le terme P_3x_3? On prolongera, jusqu'à la verticale $\alpha\beta$, les deux côtés du polygone funiculaire issus du sommet 3′; on interceptera ainsi, sur la verticale $\alpha\beta$, une longueur 3_1 qui sera (§ 67) le produit cherché. Supposons qu'on prolonge ainsi jusqu'à la verticale $\alpha\beta$ tous les côtés du polygone funiculaire, on interceptera sur cette ligne des segments

$$1_1,\ 2_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 5_1,\ 6_1,\ 7_1,\ 8_1,$$

Digitized by Google

que nous appellerons

$$P'_1,\ P'_2,\ P'_3,\ P'_4,\ P'_5,\ P'_6,\ P'_7,\ P'_8,$$

et l'on aura

$$(b) \qquad P'_1 = P_1 x_1,\quad P'_2 = P_2 x_2, \ldots,\quad P'_8 = P_8 x_8.$$

Concevons : 1° qu'on regarde ces longueurs comme un nouveau système de forces parallèles agissant aux points d'application

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

des forces données ;

2° Qu'on porte ces forces, en leur assignant des sens différents, suivant que les forces données tendent à faire tourner leurs bras de levier dans un sens convenu ou en sens contraire, sur une verticale quelconque, de façon à former un nouveau polygone des forces analogue à celui représenté sur la *fig.* 93 ;

3° Qu'on construise un polygone funiculaire relatif à un pôle distant, d'une longueur égale à l'unité, de la verticale dont il s'agit.

La verticale $\alpha\beta$ découpera, sur ce nouveau polygone funiculaire (que nous ne traçons pas pour ne pas compliquer la figure), un segment analogue à ba et que nous appellerons $b_1 a_1$. On aura

$$b_1 a_1 = P'_1 x_1 + P'_2 x_2 + \ldots,$$

ou, en vertu des expressions (b) des forces P'_i,

$$(a') \qquad b_1 a_1 = P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + P_3 x_3^2 + \ldots = \Sigma P_i x_i^2,$$

c'est-à-dire que la ligne $b_1 a_1$ représentera la somme des produits des forces données par les carrés des distances de leurs points d'application à la ligne $\alpha\beta$. Cette somme est ce qu'on appelle le *moment d'inertie* des forces données relativement à cette ligne.

De même que le polygone funiculaire de la *fig.* 93 donne non-seulement le second membre de l'équation (a), mais encore séparément chacun des termes de ce second membre, de même le nouveau polygone funiculaire dont nous venons d'indiquer le tracé donnerait chacun des termes qui composent le second membre de l'équation (a'). Appelons

$$P''_1,\quad P''_2,\quad P''_3, \ldots$$

ces termes, de façon que

$$P''_1 = P_1 x_1^2,\quad P''_2 = P_2 x_2^2, \ldots.$$

Digitized by Google

En les regardant, à leur tour, comme les grandeurs d'un système de forces parallèles agissant aux points d'application des forces données et cherchant graphiquement la ligne représentant le moment de leur résultante, on trouverait une ligne b_2a_2 telle que

$$b_2a_2 = P''_1x_1 + P''_2x_2 + P''_3x_2 + \ldots$$

ou

$$b_2a_2 = P_1x_1^2 + P_2x_2^2 + P_3x_3^2 + \ldots = \Sigma P_ix_i^2,$$

c'est-à-dire qu'on obtiendrait la somme des produits des forces données par les cubes des distances de leurs points d'application à la ligne $\alpha\beta$. En poursuivant ainsi, on obtiendrait généralement la construction graphique de l'expression

$$\mu_k = P_1x^k + P_2x_2^k \ldots + P_nx_n^k = \Sigma P_ix_i^k,$$

et, en même temps, la construction graphique de chacun des termes composant cette somme. Soient

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \ldots, \quad Q_n$$

ces termes, de telle façon que

$$Q_1 = P_1x_1^k, \quad Q_2 = P_2x_2^k, \ldots, \quad Q_n = P_nx_n^k.$$

Si l'on regarde maintenant

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \ldots, \quad Q_n$$

comme des forces parallèles agissant aux points d'application des forces données et suivant des directions *perpendiculaires* à ces forces, soit, sur la figure, parallèlement à une ligne horizontale $\gamma\delta$, on pourra trouver graphiquement le moment de leur résultante par rapport à cette ligne. Soit μ_{k+1} ce moment; si

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots, \quad y_n$$

désignent les distances des points d'application

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

des forces données à la droite $\gamma\delta$, on aura

$$\mu_{k+1} = Q_1y_1 + Q_2y_2 + \ldots + Q_ny_n$$

ou

$$\mu_{k+1} = P_1x_1^ky_1 + P_2x_2^ky_2 \ldots + P_nx_n^ky_n = \Sigma P_ix_i^ky_i.$$

Digitized by Google

En continuant à opérer sur les forces, dans la nouvelle direction qui vient de leur être donnée, comme on a opéré sur elles dans leur direction première, on trouverait successivement, et par des constructions graphiques, les quantités

$$\mu_{k+2} = \Sigma P_i x_i^k y_i^2,$$
$$\mu_{k+2} = \Sigma P_i x_i^k y_i^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mu_{k+l} = \Sigma P_i x_i^k y_i^l;$$

Cette quantité μ_{k+l} est ce qu'on peut nommer un *moment de l'ordre* $k+l$ des forces données. Dans la pratique, on ne fait guère usage que des moments des deux premiers ordres. Ceux du premier ordre sont de la forme

$$\Sigma P_i x_i :$$

ce sont les moments *statiques* ou les moments des forces données relativement à une droite $\alpha\beta$, tels que nous les avons définis au § 77. Ceux du second ordre sont de l'une des deux formes

$$\Sigma P_i x_i^2 \quad \text{ou} \quad \Sigma P_i x_i y_i.$$

Le premier est *le moment d'inertie* relativement à la droite $\alpha\beta$. Ainsi l'on nomme moment d'inertie d'un système de forces parallèles dont les points d'application sont situés dans un plan, relativement à une droite de ce plan, la somme des produits de ces forces par les carrés des distances de leurs points d'application à la droite. On donne au moment d'inertie d'une force le signe de cette force.

Si on pose

$$\Sigma P_i x_i^2 = \pm r^2 \Sigma P_i,$$

r est une longueur que l'on nomme le *rayon de gyration* du système des forces données relativement à la droite $\alpha\beta$.

Remarque. — On voit que la construction graphique des moments des divers ordres, et, en particulier, celle des moments statiques et des moments d'inertie, n'offre aucune difficulté et découle d'une façon très-remarquable de l'emploi du polygone des forces et du polygone funiculaire.

Lorsque les forces données, au lieu d'être en nombre fini, sont infiniment voisines, les polygones funiculaires sont remplacés par des courbes. On devra dans ce cas, si l'on veut opérer graphique-

ment, remplacer les forces données par un nombre fini de forces assez voisines les unes des autres pour pouvoir approximativement tenir lieu des forces données ou bien chercher l'expression analytique du moment à déterminer et construire ensuite cette expression.

Nous donnerons plus loin quelques exemples pour indiquer la marche à suivre; mais auparavant nous allons faire une étude plus complète des moments d'inertie si usités dans les applications de la Mécanique aux constructions.

§ 142.

DES MOMENTS D'INERTIE RELATIFS A DES AXES PARALLÈLES OU CONCOURANTS. — On comprend qu'entre les moments d'inertie d'un système de forces donné, relativement aux différents axes que l'on peut tracer dans le plan de leurs points d'application, il doit exister certaines dépendances.

Ces dépendances sont très-utiles à connaître : nous allons les exposer succinctement, en nous bornant au cas où toutes les forces sont de même sens.

THÉORÈME I. — *Le rayon de gyration d'un système de forces relativement à un axe quelconque est égal à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant, pour côtés de l'angle droit : 1° le rayon de gyration relativement à un axe parallèle à celui que l'on considère et passant par le centre des forces parallèles données ; 2° la distance entre ces deux axes.*

En effet, soient (*fig.* 95, *Pl. XXI*) x_i les distances des points d'application des forces données à un axe ZZ'; soient x'_i ces mêmes distances à un axe $Z_1Z'_1$ parallèle à ZZ' et passant par le centre G des forces parallèles données; enfin soit a la distance entre ces deux axes. On aura

$$x_i = x'_i + a,$$

d'où

$$\Sigma P_i x_i^2 = \Sigma P_i (x'_i + a)^2 = \Sigma P_i x_i'^2 + \Sigma P_i a^2 + 2 \Sigma P_i x'_i a$$

ou, en mettant en facteur la constante a,

$$\Sigma P_i x_i^2 = \Sigma P_i x_i'^2 + a^2 \Sigma P_i + 2a \Sigma P_i x'_i;$$

mais, en vertu du théorème sur les moments des forces parallèles,

Digitized by Google

$\Sigma P_i x'_i = 0$; car cette quantité est égale à ΣP_i multiplié par la distance du centre des forces parallèles à $Z_1 Z'_1$: or cette distance est nulle puisque $Z_1 Z'_1$ passe par ce centre. Donc

$$\frac{\Sigma P_i x^2}{\Sigma P_i} = a^2 + \frac{\Sigma P_i x_i'^2}{\Sigma P_i},$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration relatif à ZZ' est égal au carré du rayon de *gyration* relatif à $Z_1 Z'_1$ plus le carré de la distance entre ZZ' et $Z_1 Z'_1$, ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème II. — *Si, sur les diverses lignes issues d'un point quelconque d'un plan, on porte des longueurs inversement proportionnelles aux rayons de gyration relativement à ces lignes, le lieu des extrémités de ces longueurs est une ellipse.*

Soient (*fig.* 94, *Pl. XXI*) C un point quelconque du plan; Cx', Cy' deux axes de coordonnées rectangulaires et Cu une droite quelconque formant un angle α avec l'axe Cx'.

Le moment d'inertie d'une force P_i, relativement à la droite Cu, est, en désignant par x'_i et y'_i les coordonnées de son point d'application,

$$P_i(y'_i \cos\alpha - x'_i \sin\alpha)^2,$$

et le moment d'inertie de toutes les forces données relativement à Cu sera

$$\Sigma P_i (y'_i \cos\alpha - x'_i \sin\alpha)^2.$$

Si donc on appelle r le rayon de gyration relatif à cette ligne, on aura

$$r^2 \Sigma P_i = \Sigma P_i (y'_i \cos\alpha - x'_i \sin\alpha)^2$$

ou

$$r^2 \Sigma P_i = \Sigma P_i y_i'^2 \cos^2\alpha + \Sigma P_i x_i'^2 \sin^2\alpha - 2\Sigma P_i x'_i y'_i \sin\alpha\cos\alpha,$$

et en posant

$$a'^2 \Sigma P_i = \Sigma P_i x_i'^2, \quad b'^2 \Sigma P_i = \Sigma P_i y_i'^2, \quad c'^2 \Sigma P_i = \Sigma P_i x'_i y'_i,$$

$$\text{(A)} \qquad r^2 = b'^2 \cos^2\alpha + a'^2 \sin^2\alpha - 2c'^2 \cos\alpha \sin\alpha.$$

Portons sur Cu une longueur

$$CM = \frac{d}{r},$$

d étant une constante que l'on peut choisir arbitrairement. Si x' et y' désignent les coordonnées du point M, on aura

$$x' = \frac{d}{r}\cos\alpha, \qquad y' = \frac{d}{r}\sin\alpha.$$

Si on tire de là les valeurs de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$ et qu'on les porte dans l'équation (A), r^2 disparaîtra en facteur commun; et il viendra

$$(1) \qquad b'^2x'^2 + a'^2y'^2 - 2c'^2x'y' = d^2,$$

où a' et b' sont les rayons de gyration relatifs aux axes des y' et des x' et c'^2 le rapport

$$\frac{\Sigma P_i x'_i y'_i}{\Sigma P_i},$$

équation d'une ellipse.

§ 143.

ELLIPSE D'INERTIE ET AXES PRINCIPAUX. — ELLIPSE CENTRALE ET AXES CENTRAUX. — Si l'on avait pris deux autres axes de coordonnées rectangulaires Cx et Cy, on aurait obtenu une équation de la même forme, c'est-à-dire une équation telle que

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2c^2xy = d^2,$$

où a et b eussent désigné les rayons de gyration relatifs aux nouveaux axes, et c le rapport

$$\frac{\Sigma P_i x_i y_i}{\Sigma P_i}.$$

Supposons qu'on prenne pour axes des x et des y les axes principaux de la courbe.

Pour ces axes on aura $c = 0$, c'est-à-dire

$$\Sigma P_i x_i y_i = 0.$$

La courbe (1), rapportée à ces axes, prend la forme

$$b^2x^2 + a^2y^2 = d^2,$$

Digitized by Google

et, en faisant la constante $d^2 = a^2 b^2$,

$$(2) \qquad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

où a et b sont les rayons de gyration relativement aux axes principaux passant au point c, savoir : a le rayon de gyration relatif à l'axe des y, et b le rayon de gyration relatif à l'axe des x, c'est-à-dire que

$$a^2 = \frac{\Sigma P_i x_i^2}{\Sigma P_i},$$

$$b^2 = \frac{\Sigma P_i y_i^2}{\Sigma P_i}.$$

Remarque. — On donne au moment d'inertie d'une force le même signe qu'à cette force.

Si toutes les forces sont dirigées dans le même sens, on le prend pour sens positif, et alors le moment d'inertie de chaque force, relativement à un axe quelconque, étant positif, il en est de même du moment d'inertie de leur ensemble. En ce cas, a^2 et b^2 sont essentiellement positifs, et la courbe (2) ou (1) est une ellipse.

Si, au contraire, les forces données ne sont pas toutes dirigées dans le même sens, il peut arriver que les moments d'inertie du système de ces forces, relativement aux deux axes principaux passant au point C, soient de signes contraires, c'est-à-dire que l'une des quantités a^2 ou b^2 soit à remplacer par $-a^2$ ou $-b^2$. Ces quantités se trouvant alors de signes contraires, la courbe (1) ou (2) est une hyperbole.

La courbe (2), relative à un point C du plan, est nommée la *courbe* ou *conique* d'inertie relative à ce point; ses axes principaux sont appelés les *axes principaux d'inertie*, ou simplement les *axes principaux* relatifs à ce même point. Lorsque le point C coïncide avec le centre des forces parallèles, la conique d'inertie relative à ce point prend le nom de *conique centrale*, et ses axes principaux le nom *d'axes centraux* du système des forces données.

On voit qu'en chaque point les axes principaux sont tels que, si on les prend par axes des coordonnées x et y, on a

$$\Sigma P_i x_i y_i = 0.$$

On est certain qu'en chaque point il existe deux axes rectangulaires pour lesquels cette relation est satisfaite.

Digitized by Google

§ 144.

CARACTÈRE DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS DES CONIQUES D'INERTIE. — Soient (*fig.* 96, *Pl. XXI*) deux axes rectangulaires Cx' et Cy', passant par un point quelconque C du plan. L'équation de la conique relative au point C peut s'écrire, comme nous venons de le voir,

$$(1\ bis) \qquad b'^2x'^2 + a'^2y'^2 - 2c'^2x'y' = d^2,$$

où

$$a'^2 = \frac{\Sigma P_i x_i'^2}{\Sigma P_i}, \quad b'^2 = \frac{\Sigma P_i y_i'^2}{\Sigma P_i}, \quad c'^2 = \frac{\Sigma P_i x_i' y_i'}{\Sigma P_i},$$

et d^2 est une constante.

Prenons un nouvel axe Cy'' formant avec Cx' un angle θ, et soient x'' et y'' les nouvelles coordonnées. On aura

$$(b) \qquad y' = y'' \sin\theta, \quad x' = x'' + y'' \cos\theta,$$

en sorte que l'équation (1 *bis*), rapportée aux nouveaux axes, sera

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l|l|l} a'^2x''^2 + 2a'^2\cos\theta & x''y'' + a'^2\cos^2\theta & y''^2 = d^2. \\ \qquad - 2c'\sin\theta & \quad + b'^2\sin^2\theta & \\ & \quad - 2c'^2\sin\theta\cos\theta & \end{array} \right.$$

La formule (A) du § 142 montre, et il est d'ailleurs évident, que le coefficient de y''^2 est le carré du rayon de gyration relatif à l'axe Cy''. Soit b_1 ce rayon. Posons de plus

$$c_1^2 = \frac{\Sigma P_i x'' y''}{\Sigma P_i}.$$

De la formule (b) on déduit

$$y_i'' = \frac{y_i'}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad x_i'' = x_i' - \frac{y_i' \cos\theta}{\sin\theta},$$

d'où

$$x_i'' y_i'' = \frac{x_i' y_i'}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} y_i'^2,$$

et

$$\frac{\Sigma P_i x_i'' y_i''}{\Sigma P_i} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\Sigma P_i x_i' y_i'}{\Sigma P_i} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\Sigma P_i y_i'^2}{\Sigma P_i},$$

Digitized by Google

ou

$$c_1^2 = \frac{c'^2}{\sin\theta} - \frac{a'^2\cos\theta}{\sin\theta},$$

ou enfin

$$a'^2\cos\theta - c'^2\sin\theta = -c_1^2\sin^2\theta.$$

Donc l'équation (2) peut s'écrire

$$a'^2x''^2 - 2\sin^2\theta\, c_1^2\, x''y'' + b_1^2\, y''^2 = a^2.$$

Si les axes Cx'' et Cy'' sont deux diamètres conjugués de la conique centrale, le terme en $x''y''$ disparaît de cette dernière équation, c'est-à-dire que $c_1 = 0$.

Ainsi les diamètres conjugués sont caractérisés par la relation

$$(a) \qquad \Sigma P_i x_i'' y_i'' = 0.$$

Si les lignes Cx'' et Cy'' sont rectangulaires, la formule (a) caractérise les axes principaux : c'est ce que nous savions déjà.

Remarque. — Si du point dont les coordonnées sont x'' et y'' on abaisse sur Cx'' et Cy'' des perpendiculaires q et p, on aura

$$x'' = \frac{p}{\sin\theta}, \quad y'' = \frac{q}{\sin\theta};$$

donc, x_i'' et y_i'' étant les coordonnées du point d'application de la force P_i, et p_i et q_i étant les distances de ce point aux axes Cx'' et Cy'', on aura

$$x_i'' = \frac{p_i}{\sin\theta}, \quad y_i'' = \frac{q_i}{\sin\theta},$$

et par suite

$$\Sigma P_i x_i'' y_i'' = \frac{1}{\sin^2\theta}\Sigma P_i p_i q_i.$$

Donc l'équation (a), qui caractérise les diamètres conjugués Cx'' et Cy'', peut encore s'écrire

$$\Sigma P_i p_i q_i = 0.$$

§ 145.

NOUVELLE DÉFINITION DE LA CONIQUE D'INERTIE. — Si à chacune des droites Cv (*fig.* 97), issues d'un point C du plan, on mène deux

parallèles KK′, $K_1K'_1$ distantes de la droite Cv, d'une longueur égale au rayon de gyration relatif à cette droite, la conique d'inertie définie par l'équation (2) du § 143 peut encore être définie l'enveloppe des lignes KK′ ou $K_1K'_1$. Soit, en effet, Cu la direction du diamètre conjugué à la ligne quelconque Cv dans la conique (2), et soient CA $= a'$ et CB $= b'$ les longueurs des demi-diamètres conjugués dirigés suivant Cu et Cv, et θ leur angle uCv. En vertu de la définition de la conique (2) (§ 143), si r est le rayon de gyration relatif à l'axe Cv, on a

$$r = \frac{d}{b'} = \frac{ab}{b'},$$

a et b désignant les demi-axes de la conique; mais on a, en vertu d'un théorème bien connu,

$$ab = a'b' \sin\theta,$$

d'où

$$r = \frac{a'b' \sin\theta}{b'} = a' \sin\theta,$$

c'est-à-dire que le rayon de gyration relatif à Cv est la longueur de la perpendiculaire AP abaissée, sur cette ligne, par l'extrémité A de son diamètre conjugué; et comme la tangente en A est parallèle à Cv, on voit que cette tangente coïncide avec la ligne KK′, ce qu'il fallait démontrer.

§ 146.

TRACÉ GRAPHIQUE DE LA DIRECTION DES AXES PRINCIPAUX RELATIFS A UN POINT QUELCONQUE DU PLAN. — Connaissant la conique centrale d'un système de forces, il peut être utile de savoir trouver graphiquement la direction des axes principaux relatifs à un point quelconque C du plan. Ce problème se résout très-simplement.

Soient, en effet (*fig.* 99, *Pl. XXII*), $aa' = 2a$ et $bb' = 2b$ les axes de la conique centrale tracée en pointillé sur la figure. On aura

$$a^2 = \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i},$$

$$b^2 = \frac{\Sigma P_i y_i^2}{\Sigma P_i}.$$

Nous supposons, pour fixer les idées, $a < b$. Faisons tourner cette conique d'un angle droit autour de son centre; nous aurons ainsi la conique AA'BB'. Soient F et F' ses foyers, de sorte que

$$CF = \sqrt{b^2 - a^2} = k.$$

Désignons par x et y les coordonnées d'un point quelconque C du plan, rapporté aux axes centraux Ox et Oy, et soient Cx' et Cy' deux axes parallèles à Ox et Oy, passant au point C. Le rayon de gyration relatif à l'axe Cx' est (§ 142)

$$b' = \sqrt{b^2 + y^2}.$$

Le rayon de gyration relatif à l'axe Cy' est

$$a' = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Soient x'_i et y'_i les coordonnées du point d'application d'une quelconque des forces données P_i, relativement aux axes Cx' et Cy'. Posons

$$c'^2 = \frac{\Sigma P_i x'_i y'_i}{\Sigma P_i}.$$

On a

$$x'_i = x_i - x,$$

$$y'_i = y_i - y,$$

d'où

$$x'_i y'_i = x_i y_i - y x_i - x y_i + xy,$$

$$c'^2 = \frac{\Sigma P_i x'_i y'_i}{\Sigma P_i} = \frac{\Sigma P_i x_i y_i}{\Sigma P_i} - y \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i} - x \frac{\Sigma P_i y_i}{\Sigma P_i} + xy.$$

Et comme Cx et Cy sont les axes centraux, les trois premiers termes sont nuls; donc

$$c'^2 = xy.$$

L'équation de la courbe d'inertie relative au point C, rapportée aux axes Cx' et Cy', est (§ 143)

$$b'^2 x'^2 + a'^2 y'^2 - 2c'^2 x' y' = d^2,$$

ou

$$(b^2 + y^2) x'^2 + (a^2 + x^2) y'^2 - 2xy x' y' = d^2.$$

Soient CX et CY ses axes principaux; si α est l'angle que l'un de ces axes fait avec Cx' ou avec Ox, on a, d'après la théorie des courbes du second degré,

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{-2xy}{b^2+y^2-(a^2+x^2)} = \frac{-2xy}{k^2+y^2-x^2},$$

ou bien

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{\dfrac{y}{x-k}+\dfrac{y}{x+k}}{1-\dfrac{y}{x-k}\,\dfrac{y}{x+k}},$$

ou, comme

$$\frac{y}{x-k} = \operatorname{tang} \mathrm{CF}x,$$

$$\frac{y}{x+k} = \operatorname{tang} \mathrm{CF}'x,$$

on a

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \operatorname{tang}(\mathrm{CF}'x + \mathrm{CF}x),$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{CF}'x + \mathrm{CF}x),$$

et

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\mathrm{CF}'x + \mathrm{CF}x).$$

Cela signifie que, si l'on joint le point C aux deux foyers F et F′ de la conique AA′BB′ et qu'on mène les bissectrices des deux angles supplémentaires formés par ces rayons vecteurs, ces bissectrices sont précisément les axes principaux cherchés.

§ 147.

On sait que, par tout point C d'un plan, on peut faire passer une ellipse et une hyperbole admettant les foyers F et F′ et se coupant à angle droit; les lignes CX et CY sont précisément les tangentes, ou, si l'on veut, les normales à ces lignes.

Ainsi, *lorsque des forces parallèles quelconques agissent sur un nombre fini ou non de points pris dans un plan, leurs axes prin-*

cipaux d'inertie aux divers points du plan sont les normales aux deux familles de coniques homofocales à la conique centrale, que l'on aurait fait tourner d'un angle droit autour de son centre.

§ 148.

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DE LA GRANDEUR DES AXES PRINCIPAUX RELATIFS A UN POINT QUELCONQUE ET DU MOMENT D'INERTIE RELATIF A UNE DROITE QUELCONQUE DU PLAN. — Une fois connue la direction des axes principaux relatifs à un point quelconque du plan, rien n'est plus facile que de déterminer la grandeur de ces axes ; car on peut facilement trouver le rayon de gyration relatif à une droite quelconque XX′ du plan (*fig.* 99). Pour cela, du centre O des forces parallèles, on mènera une droite $\xi\xi'$ parallèle à la droite donnée. La perpendiculaire abaissée sur $\xi\xi'$, de l'extrémité du diamètre de l'ellipse centrale conjugué à $\xi\xi'$, représente (§ 145) le rayon de gyration relatif à cette ligne. Connaissant le rayon de gyration relatif à $\xi\xi'$, celui relatif à XX′ se déduit du théorème I établi au paragraphe 142. Soit b' ce rayon.

On trouvera de même le rayon de gyration a', relatif à l'axe CY′.

La conique d'inertie relative au point C a pour demi-axes, suivant XX′, la longueur a' et, suivant CY′, la longueur b'; cette conique est d'ailleurs inutile à tracer, puisque, à l'aide de la conique centrale, on peut trouver graphiquement le moment d'inertie relatif à une droite quelconque, ainsi que la direction des axes principaux relatifs à un point quelconque.

On voit par là combien il importe de savoir tracer la conique centrale d'un système de forces données. On le peut évidemment, si l'on connait les rayons de gyration relativement à trois axes de directions quelconques passant par le centre des forces parallèles, ou relativement à deux axes seulement, pourvu que l'on sache d'avance que ces axes sont dirigés suivant deux diamètres conjugués de la conique à tracer. Dans le premier cas, on connaît le centre de la conique et trois de ses points ; dans le second, on connaît, en grandeur et en position, un système de diamètres conjugués.

Digitized by Google

§ 149.

Voici un cas qui se présente fréquemment, où l'on connaît d'avance les directions de deux diamètres conjugués.

Supposons (*fig.* 101, *Pl. XXII*) que des forces données soient deux à deux égales ; supposons, de plus, que les lignes aa', $a_1a'_1$, $a_2a'_2$, ..., qui joignent les points d'application des couples de forces égales, soient parallèles à une direction fixe XX', et qu'enfin les milieux des lignes aa', $a_1a'_1$, $a_2a'_2$ soient sur une ligne droite YY'. Nous appellerons cette droite un *diamètre* du système des forces données.

Si un système de forces parallèles admet un diamètre, le centre G de ces forces est sur ce diamètre (*). Soit $X_1X'_1$ une parallèle menée par le point G à la direction des lignes que le diamètre divise en parties égales ; je dis que les droites $X_1X'_1$ et YY' sont des diamètres conjugués de la conique centrale, c'est-à-dire (§ 144) que, si l'on rapporte cette conique aux axes GX'_1 et GY', en appelant x''_i et y''_i les coordonnées du point d'application de l'une des forces données, on aura

$$\Sigma P_i x''_i y''_i = 0.$$

En effet, les points d'application a et a' de deux forces égales ayant même ordonnée et des abscisses égales et de signes contraires donneront, dans la somme ci-dessus, un total nul ; il en est de même des deux forces égales appliquées en a_1 et en a'_1, et ainsi de suite.

§ 150.

Habituellement on a à étudier les moments d'inertie d'aires limitées par des contours fermés, en supposant, comme on l'a déjà fait à l'occasion des centres de gravité, ces aires matérialisées et pesantes. Le moment d'inertie (*fig.* 98, *Pl. XXI*) d'une aire (A),

(*) Cela est évident : car le centre des deux forces appliquées en a et a' est sur ce diamètre ; de même, le centre des deux forces appliquées en a_1 et a'_1, et ainsi de suite : donc le centre de toutes les forces données s'y trouve aussi, en vertu de la *Remarque I* du § 74.

relativement à un axe OX, est le moment d'inertie des forces que la pesanteur exerce sur cette aire. Dans ce cas, toutes les forces étant dirigées dans le même sens, la courbe centrale est toujours une ellipse qu'on appelle l'*ellipse centrale* d'inertie. Ses axes sont les axes centraux de l'aire donnée. Le carré du rayon de gyration relatif à un axe est le quotient du moment d'inertie relatif à cet axe par le poids de l'aire donnée ou par l'aire elle-même, si elle est homogène et de densité 1 (*).

Pour trouver l'ellipse centrale et pour connaître par suite (§ 148) le moment d'inertie de l'aire donnée, relativement à un axe quelconque pris dans son plan, il suffit, d'après ce qui précède, de connaître ses moments d'inertie relativement à trois lignes de directions quelconques passant par son centre de gravité, ou bien les moments d'inertie relatifs à deux de ces lignes que l'on sache d'avance être un système de diamètres conjugués de l'ellipse d'inertie.

Si une aire est décomposable en plusieurs autres, le moment d'inertie de l'aire totale est la somme des moments d'inertie des aires partielles : il suffit donc de savoir trouver les moments d'inertie de ces dernières.

§ 151.

Si l'aire donnée admet un diamètre rectiligne, cette ligne qui passe par le centre de gravité de l'aire et une parallèle aux cordes qu'elle divise en parties égales, menée par le centre de gravité, forment (§ 149) un système de diamètres conjugués de l'ellipse centrale, en sorte qu'on pourra construire la courbe si l'on connaît les moments d'inertie relatifs à ces deux lignes.

De là on déduit que, si la surface comporte un axe de symétrie, cet axe et sa perpendiculaire, menée par le centre de gravité, sont les axes centraux de la surface.

(*) Plus souvent encore, on définit le moment d'inertie d'un corps : la somme des produits de la masse (et non du poids) de chacun de ses éléments par le carré de sa distance à une droite. On passe de ce moment d'inertie à celui que nous considérons en multipliant le premier par l'accélération $g = 9{,}8088$ à la gravité.

Digitized by Google

§ 152.

RECHERCHE DES MOMENTS D'INERTIE ET DE LA COURBE CENTRALE D'INERTIE. — Nous avons déjà vu (§ 141) que, quand on a un nombre limité de forces, leur moment d'inertie relatif à un axe quelconque se trouve graphiquement, sans difficulté, en faisant usage du polygone des forces et du polygone funiculaire. Par suite, on peut trouver graphiquement les éléments nécessaires au tracé de la conique centrale.

Lorsque les forces données sont en nombre illimité, comme cela a lieu pour les forces de la pesanteur agissant sur les divers points d'une surface plane supposée matérialisée, les procédés graphiques permettent encore de trouver approximativement les moments d'inertie. Il suffit de remplacer les forces données en nombre illimité par un nombre fini de forces assez voisines les unes des autres pour pouvoir, approximativement, tenir lieu des forces données.

Dans ce cas, on fait souvent usage aussi du Calcul intégral pour déterminer l'expression analytique des moments d'inertie, sauf à construire ensuite ces expressions par les procédés du calcul graphique.

Si ρ est la densité au point m de l'aire (A) rapportée à deux axes rectangulaires, le moment d'inertie de cette aire est

$$I = \int\int \rho\, y^2 dx\, dy;$$

son aire est

$$\Omega = \int\int \rho\, dx\, dy,$$

et le rayon de gyration r est

$$r = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}.$$

Si la surface est homogène, le moment d'inertie de la bande $\alpha\beta\alpha'\beta'$ (*fig.* 98, *Pl. XXI*), de hauteur dy, est

$$\rho . \alpha\beta . y^2 dy .$$

$\alpha\beta$ est une fonction de y, définie par le contour qui limite l'aire donnée (A). Si

$$\alpha\beta = f(y),$$

le moment d'inertie de l'aire donnée sera

$$\rho \int y^2 f(y)\, dy,$$

son poids étant

$$\rho \int f(y)\, dy;$$

le rayon de gyration sera donné par

$$r^2 = \frac{\int y^2 f(y)\, dy}{\int f(y)\, dy};$$

la densité ρ disparaît.

§ 153.

On peut parfois remplacer le Calcul intégral par la règle suivante :

Soit η la distance à OX du centre de gravité de l'aire (A). Le théorème des moments donne

$$\eta \int\int \rho\, dx\, dy = \int\int \rho\, y\, dx\, dy.$$

Considérons un cylindre ayant pour base le périmètre de l'aire donnée (A) et ayant ses génératrices normales au plan de cette aire, ce cylindre étant limité par un plan passant par OX et incliné à 45 degrés sur le plan donné. Soit η_1 la distance à OX de la projection sur le plan (A) du centre de gravité du cylindre. Le volume de l'élément cylindrique ayant pour base $dx\, dy$ sera $y\, dx\, dy$, son poids $\rho y\, dx\, dy$; son moment $\rho y^2\, dx\, dy$. Donc le théorème des moments donnera

$$\eta_1 \int\int \rho y\, dx\, dy = \int\int \rho y^2\, dx\, dy.$$

Multipliant membre à membre les deux dernières égalités et supprimant le facteur $\int\int \rho y\, dx\, dy$ commun aux deux membres, il vient

$$\eta\eta_1 \int\int \rho\, dx\, dy = \int\int \rho\, y^2\, dx\, dy,$$

d'où

$$\eta\eta_1 = \frac{\int\int \rho\, y^2\, dx\, dy}{\int\int \rho\, dx\, dy} = r^2.$$

Ainsi le rayon de gyration cherché est la moyenne géométrique entre les distances η et η_1. M. Bresse donne ce procédé dans son *Cours de Résistance des matériaux professé à l'École des Ponts et Chaussées.*

Digitized by Google

§ 154.

RECTANGLE HOMOGÈNE. — Appliquons-le à la recherche du moment d'inertie d'un rectangle homogène YY'ZZ' (*fig.* 102, *Pl. XXII*), relativement à l'un de ses côtés, au côté YY' par exemple. Soient $YY' = a$, $Y'Z' = b$.

On a, pour la distance η du centre de gravité du rectangle à l'axe YY',

$$\eta = \frac{b}{2}.$$

Maintenant élevons en Z et Z' des perpendiculaires ZZ_1, $Z'Z'_1$ jusqu'à leur rencontre en Z_1 et Z'_1, avec un plan incliné à 45 degrés, mené par YY'. Nous formerons un prisme : son centre de gravité sera sur la ligne gg' joignant les centres de gravité des triangles YZ_1Z et $Y'Z'_1Z'$. La projection $g_1 g'_1$ de cette ligne sera à une distance de YY'

$$\eta_1 = Yg_1 = \frac{2}{3}\,YZ = \frac{2b}{3}.$$

Donc

$$r^2 = \eta\eta_1 = \frac{b}{2} \times \frac{2b}{3} = \frac{b^2}{3},$$

$$r = \frac{b}{\sqrt{3}},$$

Le Calcul intégral fournirait le même résultat; car, en considérant une bande $\alpha\beta\alpha'\beta'$ de hauteur dy, distante de y de la ligne YY', son moment d'inertie sera ay^2dy, et le moment d'inertie du rectangle sera

$$\int_0^b ay^2\,dy = \frac{ab^3}{3}.$$

Donc le carré du rayon de gyration, égal au moment d'inertie divisé par la surface ab du rectangle, sera

$$\frac{b^2}{3}.$$

Ayant le rayon de gyration de l'aire d'un rectangle relativement

à l'un de ses côtés, on en déduit immédiatement celui qui est relatif à une parallèle YY′ (*fig.* 103, *Pl. XXII*) à ce côté, passant par le centre du rectangle. Ce dernier sera donné (§ 142) par la formule

$$r^2 = \frac{b^2}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{12},$$

d'où

$$r = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

De même, le rayon de gyration relatif à un axe $Z_1Z'_1$, perpendiculaire au précédent et passant par le centre du rectangle, serait

$$r' = \frac{a}{\sqrt{12}}.$$

Ces résultats se déduiraient aussi facilement du Calcul intégral.

Il est évident que les axes de symétrie du rectangle sont les axes principaux d'inertie (§ 151). Donc l'ellipse centrale du rectangle a ses axes dirigés suivant $Y_1Y'_1$ et $Z_1Z'_1$, et les grandeurs de ses demi-axes sont $\frac{a}{\sqrt{12}}$ et $\frac{b}{\sqrt{12}}$; son équation sera donc

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{a^2b^2}{12}.$$

§ 155.

TRIANGLE. — Pour avoir le rayon de gyration d'un triangle ABC (*fig.* 104, *Pl. XXII*) relativement à l'un de ses côtés, à BC par exemple, nous remarquerons que la distance η du centre de gravité du triangle au côté BC est

$$\eta = \frac{h}{3},$$

en appelant h la longueur de la perpendiculaire AP abaissée, du sommet A, sur le côté BC. Élevons en A une normale au plan du triangle et prenons sur cette normale une longueur AA′ égale à AP. Le centre de gravité du tétraèdre ayant pour sommets B, C, A et A′

Digitized by Google

(§ 102) est au milieu O de la ligne IJ qui joint les milieux des arêtes opposées BC et AA'. La projection de O sur le plan du triangle sera, par suite, au milieu de la médiane AI. Donc

$$n_1 = \frac{h}{2},$$

et, par suite, le rayon de gyration r sera

$$r = \sqrt{nn_1} = \sqrt{\frac{h}{3} \times \frac{h}{2}} = \frac{h}{\sqrt{6}};$$

c'est ce que le Calcul intégral indiquerait aussi. Soit, en effet, $BC = b$ la longueur du côté BC. Considérons la bande $\alpha\beta\,\alpha'\beta'$ de hauteur dy, distante de y de la ligne BC. On aura

$$\alpha\beta = \frac{b}{h}(h - y).$$

Donc le moment d'inertie de la bande $\alpha\beta\,\alpha'\beta'$ est

$$\alpha\beta \times dy \times y^2 = \frac{b}{h}(h - y)y^2 dy,$$

et le moment d'inertie du triangle

$$\int_0^h \frac{b}{h}(h - y)y^2 dy = \frac{b}{h}\left(\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)_0^h = \frac{bh^3}{12}.$$

Le rayon de gyration étant r, on aura donc

$$\frac{bh}{2} r^2 = \frac{bh^3}{12},$$

d'où

$$r = \frac{h}{\sqrt{6}}.$$

§ 156.

Sachant trouver le moment d'inertie d'un triangle relativement à un de ses côtés, on en déduit (*fig.* 105, *Pl. XXIII*) son moment d'inertie relatif à un axe de direction quelconque Bu passant par

un de ses sommets; car ce moment d'inertie est, suivant les cas, la somme ou la différence des moments d'inertie des deux triangles BAD et BCD, relativement à l'axe Bu qui est un de leurs côtés.

Si l'on veut maintenant trouver le moment d'inertie d'un triangle ABC, relatif à un axe quelconque xx', on cherchera son moment relatif à un axe parallèle Bu, passant par un sommet B du triangle. On en déduira, par le théorème du § 142, le moment d'inertie relatif à un axe parallèle à Bu et passant par le centre de gravité G du triangle.

Enfin, de là et par le même théorème, on déduira le moment d'inertie cherché.

§ 157.

Si l'on veut trouver l'ellipse centrale d'un triangle ABC, il suffit de remarquer qu'une médiane AI (*fig.* 106, *Pl. XXIII*) étant une ligne diamétrale conjuguée au côté BC, qu'elle divise en deux parties égales, les lignes GA et GX, passant par le centre de gravité du triangle et dont la dernière est parallèle à BC, sont des diamètres conjugués de l'ellipse centrale (§ 151).

Donc on n'aura qu'à chercher les moments d'inertie relatifs à ces deux lignes, pour tracer l'ellipse centrale.

Le carré du rayon de gyration relatif à BC étant $\frac{h^2}{6}$, le carré du rayon de gyration relatif à une parallèle à BC menée par le centre de gravité du triangle sera (§ 142)

$$\frac{h^2}{6} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{h^2}{18}.$$

Le carré du rayon de gyration du triangle ABC, relatif à la médiane AI, est double du carré du rayon de gyration relatif à AI du triangle AIC. Ce dernier, en appelant k la longueur de la perpendiculaire abaissée de C sur la médiane, est $\frac{k^2}{6}$: le premier est donc $\frac{k^2}{3}$.

On a ainsi les éléments nécessaires au tracé de l'ellipse centrale.

Si le triangle est *isoscèle,* les lignes GA et GX étant perpendiculaires sont les axes de l'ellipse centrale. Si b est la base et h la hauteur du triangle, les carrés des deux rayons de gyration principaux

Digitized by Google

seront

$$\frac{h^2}{18} \text{ et } \frac{k^2}{3} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{3} = \frac{b^2}{12}.$$

Si le triangle est équilatéral, une médiane quelconque est axe principal, ce qui exige que l'ellipse centrale se réduise à un cercle. C'est ce qui a lieu aussi pour un polygone régulier quelconque, de même que pour un cercle ou un anneau circulaire.

§ 158.

ELLIPSE ET COURONNE ELLIPTIQUE. CERCLE ET ANNEAU CIRCULAIRE. — Soit (*fig.* 108, *Pl. XXIII*) une ellipse dont le grand axe $AA' = 2a$ et le petit axe $BB' = 2b$. Prenons une zone $\alpha\beta\alpha'\beta'$, de hauteur dy, distante de y de l'axe AA', et de longueur $\alpha\beta = 2x$. Son moment d'inertie relatif à l'axe AA' est

$$2xy^2\,dy,$$

et le moment d'inertie de l'aire de l'ellipse sera

$$2\int xy^2 dy.$$

L'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On satisfait à cette équation, quel que soit l'angle θ, en posant

$$x = a\cos\frac{\theta}{2},$$

$$y = b\sin\frac{\theta}{2};$$

d'où

$$dy = \frac{1}{2}\,b\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

et l'expression du moment d'inertie devient

$$ab^2\int\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{ab^3}{4}\int\sin^2\theta\,d\theta.$$

L'intégrale doit être prise entre $+\pi$ et $-\pi$.

Or

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2},$$

$$\int \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4},$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \pi.$$

Donc le moment d'inertie relatif à l'axe AA′ est

$$(a) \qquad \frac{\pi a b^3}{4},$$

et le rayon de gyration

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\pi a b^3}{\pi a b}} = \frac{1}{2} b.$$

On trouverait de même que le moment d'inertie relatif à l'axe BB′ est

$$\frac{\pi a^3 b}{4},$$

et le rayon de gyration correspondant, $\frac{1}{2} a$.

Comme les axes principaux de l'ellipse donnée sont nécessairement les axes centraux de l'ellipse centrale, cette ellipse sera semblable à la proposée et semblablement placée, et ses axes seront égaux aux demi-axes de la proposée.

Soit maintenant un anneau compris entre deux ellipses semblables et semblablement placées, dont l'une ait pour demi-axes a et b et l'autre ma et mb, m étant un nombre que nous supposons plus petit que l'unité.

Le moment d'inertie de l'anneau, relativement à l'axe $2a$, a pour expression

$$\frac{\pi a b^3}{4} - \frac{\pi m^4 a b^3}{4},$$

ou

$$\frac{\pi a b^3}{4}(1 - m^4).$$

Digitized by Google

L'aire de l'anneau étant

$$\pi ab(1 - m^2),$$

le rayon de gyration sera

$$\sqrt{\frac{b^2(1 - m^4)}{4(1 - m^2)}} = \frac{b}{2}\sqrt{1 + m^2}.$$

De même, le rayon de gyration relatif à l'axe $2b$ sera

$$\frac{a}{2}\sqrt{1 + m^2}.$$

Il résulte de là que l'ellipse centrale sera semblable aux ellipses données, semblablement placée, et ses axes principaux seront

$$\frac{a}{2}\sqrt{1 + m^2} \quad \text{et} \quad \frac{b}{2}\sqrt{1 + m^2}.$$

Remarque. — Le moment d'inertie d'un cercle de rayon R, relatif à un diamètre quelconque, sera, d'après l'expression (a) ci-dessus, où l'on fait $a = b = \mathrm{R}$,

$$\frac{\pi \mathrm{R}^4}{4};$$

le rayon de gyration est $\frac{\mathrm{R}}{2}$. L'ellipse centrale est un cercle de rayon moitié de celui du cercle donné.

L'ellipse centrale d'une couronne comprise entre deux cercles concentriques de rayons R et $m\mathrm{R}$ est un cercle de rayon

$$\frac{\mathrm{R}}{2}\sqrt{1 + m^2}.$$

Digitized by Google

CHAPITRE XVIII.

ÉTUDE DES FORCES PARALLÈLES DONT LES POINTS D'APPLICATION SONT SITUÉS DANS UN PLAN ET DONT LES INTENSITÉS SONT PROPORTIONNELLES AUX DISTANCES DE LEURS POINTS D'APPLICATION A UNE DROITE DE CE PLAN. — NOYAU CENTRAL DES AIRES PLANES.

§ 159.

UTILITÉ DE LA CONSIDÉRATION DES FORCES QUI FONT L'OBJET DE CE CHAPITRE. — Parmi les forces parallèles agissant sur les points d'un plan, celles dont les intensités sont proportionnelles aux distances de leurs points d'application à une droite du plan se rencontrent fréquemment. Ainsi, quand un corps tourne autour d'un axe, les points situés dans un plan passant par l'axe subissent à chaque instant des forces d'inertie proportionnelles à leurs distances à l'axe.

Si l'on conçoit un plan traversant l'espace occupé par un liquide pesant en équilibre, les pressions aux divers points de ce plan sont proportionnelles à leurs distances à la trace du plan sur la surface libre du liquide.

Enfin les forces élastiques qui se développent dans les sections transversales des pièces que l'on étudie en Résistance des matériaux sont aussi proportionnelles aux distances de leurs points d'application à une ligne fixe.

Les forces appliquées aux divers points d'un plan, et proportionnelles aux distances de leurs points d'application à une droite de ce plan, offrent donc un intérêt de premier ordre dans les applications de la Mécanique.

§ 160.

RECHERCHE GRAPHIQUE DU CENTRE DE CES FORCES PARALLÈLES. — Soit un système de forces parallèles

$$(1) \qquad P_1 = k_1 u_1, \quad P_2 = k_2 u_2, \ldots, \quad P_n = k_n u_n,$$

où

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \ldots, \quad k_i, \ldots, \quad k_n$$

sont des constantes essentiellement positives, et

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots, \quad u_i, \ldots, \quad u_n$$

les distances des points d'application

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \ldots, \quad A_i, \ldots, \quad A_n$$

des forces considérées à une droite ZZ' (*fig.* 107, *Pl. XXIII*).

Ces distances sont comptées positivement ou négativement suivant que les points d'application sont à droite ou à gauche de la droite ZZ'. Cette droite elle-même sera désignée sous le nom d'*axe neutre*.

Considérons un système de forces fictives égales aux constantes

$$(2) \qquad k_1, \quad k_2, \quad k_3, \ldots, \quad k_n,$$

appliquées respectivement aux points d'application et suivant les lignes d'action des forces données (1) et toutes de même sens.

Soit O le centre des forces parallèles $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$.

Traçons leur ellipse centrale et désignons par OY le diamètre de cette courbe, parallèle à l'axe neutre ZZ', et par OX son diamètre conjugué.

Soient $OA = a$ et $OB = b$ les demi-longueurs des diamètres dirigés suivant OX et OY.

Abaissons BP perpendiculaire sur OA, et AQ perpendiculaire sur OY; BP sera (§ 145) le rayon de gyration des forces (2), relatif à l'axe OX, et AQ celui relatif à l'axe OY. Donc, si q_i et p_i sont les distances du point d'application A_i de la force k_i à ces axes, ces distances étant comptées positivement dans l'angle YOX, on aura

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{BP}^2 &= \frac{\Sigma k_i q_i^2}{\Sigma k_i}, \\ \overline{AQ}^2 &= \frac{\Sigma k_i p_i^2}{\Sigma k_i}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Ajoutons que, O étant le centre des forces parallèles (2), le théorème des moments donne

$$(b) \qquad \begin{cases} \Sigma k_i q_i = 0, \\ \Sigma k_i p_i = 0. \end{cases}$$

Enfin, puisque OX et OY sont des diamètres conjugués de la courbe centrale des forces (2), on a (§ **144**, *Remarque*)

$$(c) \qquad \Sigma k_i p_i q_i = 0.$$

Ces relations établies, nous pouvons maintenant procéder à la recherche du centre G des forces parallèles données (1). Si q' et p' désignent les distances positives ou négatives de ce point aux axes OX et OY, le théorème des moments donnera

$$(f) \qquad \begin{cases} q' \Sigma P_i = \Sigma P_i q_i, \\ p' \Sigma P_i = \Sigma P_i p_i. \end{cases}$$

Or

$$\Sigma P_i q_i = \Sigma k_i u_i q_i;$$

d'ailleurs, si d est la distance entre les lignes OY et ZZ', cette distance étant, comme celles p_i, comptée positivement ou négativement suivant que l'axe neutre ZZ' est à droite ou à gauche de OY, on aura

$$u_i = p_i - d,$$

d'où

$$\Sigma P_i q_i = \Sigma k_i (p_i - d) q_i = \Sigma k_i p_i q_i - d \Sigma k_i q_i,$$

quantité nulle en vertu des relations (b) et (c). Donc $q' = 0$, et le centre G des forces parallèles données est sur le diamètre OX, conjugué de l'axe neutre ZZ' dans la conique centrale du système des forces fictives (2).

Maintenant

$$\Sigma P_i p_i = \Sigma k_i u_i p_i = \Sigma k_i (p_i - d) p_i = \Sigma k_i p_i^2 - d \Sigma k_i p_i,$$

ou, en vertu de (b),

$$\Sigma P_i p_i = \Sigma k_i p_i^2.$$

D'un autre côté

$$\Sigma P_i = \Sigma k_i u_i = \Sigma k_i (p_i - d) = \Sigma k_i p_i - d\Sigma k_i = -d\Sigma k_i.$$

Donc, la seconde des équations (f) donne

$$p' = \frac{\Sigma P_i p_i}{\Sigma P_i} = -\frac{\Sigma k_i p_i^2}{d\Sigma k_i},$$

ou, en vertu de (a),

$$p' = -\frac{\overline{AQ}^2}{d},$$

équation qui montre que p' et d sont de signes contraires, c'est-à-dire que l'axe neutre ZZ' et le centre G des forces parallèles (1) sont placés de part et d'autre du centre O des forces fictives (2).

En appelant θ l'angle aigu XOY', on aura, en valeur absolue,

$$p' = OG \sin\theta,$$
$$AQ = OA \sin\theta,$$
$$d = OI \sin\theta;$$

d'où

$$(3) \qquad OG \times OI = \overline{OA}^2,$$

ce qui permet de construire le centre des forces parallèles données.

Remarque. — La relation (3) montre que le point G, centre des forces parallèles données (1) et le pôle g de l'axe neutre ZZ', relativement à la conique centrale des forces fictives (2), sont deux points symétriques par rapport au centre de ces forces fictives ou, si l'on veut, que le point cherché G est l'*antipôle* de l'axe neutre.

§ 161.

CAS DE FORCES EN NOMBRE ILLIMITÉ AGISSANT SUR DES POINTS SE SUCCÉDANT D'UNE MANIÈRE CONTINUE DANS UN PLAN. — Supposons maintenant que les forces données P_i, au lieu d'être en nombre fini, soient

Digitized by Google

réparties d'une manière continue sur les différents points d'une portion de plan limitée par un contour quelconque MNM'N'; alors les coefficients k_i sont donnés pour tous les points intérieurs à ce contour. Rien n'empêche de supposer l'aire MNM'N' matérialisée et de lui attribuer en chacun de ses points A_i une densité proportionnelle à la valeur qu'acquiert en ce point le coefficient k_i. Cette valeur sera celle que prendra une certaine fonction donnée

$$k = f(x, y)$$

des coordonnées des points du plan, pour les valeurs particulières x_i et y_i de ces coordonnées.

D'après cette considération, le point O sera le centre de gravité de l'aire MNM'N'; l'ellipse AB sera son ellipse centrale, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si aux divers points d'une surface plane, matérielle, homogène ou non, on applique des forces parallèles, proportionnelles à une densité arbitrairement attribuée à la surface en ce point et à la distance positive ou négative de ce point à une droite fixe, le centre de ces forces parallèles et l'antipôle de cette droite relativement à l'ellipse centrale de la surface donnée.*

Remarque. — Si l'on veut appliquer ce théorème aux pressions que subit une aire plane plongée dans un liquide, il faut supposer à l'aire, en chaque point, une densité égale à celle du liquide ; si on veut l'appliquer à une section transversale faite dans une des pièces que l'on étudie en Résistance des matériaux, il faut supposer, à chaque point de la surface, une densité égale au coefficient d'élasticité de la pièce en ce point, en sorte que, si celle-ci est homogène, la densité sera constante en tous les points de la section, et ainsi de suite.

§ 162.

NOYAU CENTRAL D'UNE AIRE PLANE. — Lorsque l'axe neutre est situé en dehors de l'aire MNM'N', les distances u des divers points de l'aire à cet axe sont toutes de même signe ; et, comme la densité k est une quantité essentiellement positive, on voit que les forces

parallèles égales à ku qui agissent sur les divers points de l'aire seront toutes de même signe, c'est-à-dire qu'elles seront toutes dirigées dans le même sens. Si, au contraire, l'axe neutre occupe une position telle qu'il coupe le contour MNM'N', alors les distances u, à l'axe neutre, des points situés de part et d'autre de cet axe sont de signes contraires, et les forces appliquées en ces points sont aussi de signes contraires, c'est-à-dire qu'elles sont dirigées dans des sens opposés. Lorsqu'il s'agit de forces élastiques par exemple, si celles situées d'un côté de l'axe sont des tensions, celles situées du côté opposé sont des compressions, tandis que toutes sont de même nature (tensions ou compressions) si l'axe neutre est extérieur au contour de l'aire donnée. Il y a donc un grand intérêt à distinguer les cas où l'axe neutre coupe ou non le contour MNM'N'. La démarcation entre ces deux cas a lieu pour les positions de l'axe neutre tangentes au contour. Ainsi supposons que, l'axe neutre étant en ZZ', le centre des forces parallèles agissant sur l'aire donnée soit en G. Si ZZ' se déplace parallèlement à lui-même de façon à se rapprocher de la courbe MNM'N', le point G parcourra le diamètre XX', et s'éloignera du point O, comme l'indique la formule (3). Quand ZZ sera arrivé à être tangent à MNM'N', le point G aura pris une certaine position G_2; si ZZ' continue à se rapprocher jusqu'à se confondre avec OY, le point G s'éloignera indéfiniment. S'il dépasse OY de façon à arriver en $Z_1Z'_1$, le point G reviendra à une distance finie, mais il ne sera plus du côté OX' de l'axe XX'. Si l'axe neutre vient à se confondre avec la tangente $Z_4Z'_4$ à la courbe, le point G occupera, par exemple, le point G_4, puis, à mesure que l'axe s'éloignera, le point G se rapprochera de O jusqu'à venir se confondre avec lui.

On voit par là que tant que, l'axe est en dehors de la courbe MNM'N', le point G est compris entre les positions G_2 et G_4 qui sont les points symétriques des pôles des tangentes $Z_2Z'_2$ et $Z_4Z'_4$ à la courbe MNM'N' relativement à l'ellipse centrale.

Ce que nous venons de dire pour la direction particulière ZZ', on peut le répéter pour toute autre direction ; on obtiendra ainsi une courbe telle que $G_2G_4\alpha\beta$, jouissant de cette propriété que, tant que la résultante des forces parallèles agissant sur l'aire donnée tombe à l'intérieur de cette courbe, l'axe neutre est extérieur au périmètre de l'aire donnée et, par suite, toutes les forces agissant sur cette aire

sont nécessairement de même signe ; si au contraire la résultante de ces forces tombe en dehors de la courbe $G_2G_4\alpha\beta$ l'axe neutre coupe le contour de l'aire donnée, et les forces situées de part et d'autre de cet axe sont de sens contraires.

L'aire comprise dans le périmètre $G_2G_4\alpha\beta$ est ce qu'on nomme le *noyau central* de l'aire donnée. Tout point du périmètre $G_2G_4\alpha\beta$ étant l'antipôle d'une tangente au périmètre donné, on voit que le premier de ces périmètres est une courbe symétrique par rapport au point O, de la polaire réciproque du second relativement à l'ellipse centrale de l'aire donnée.

§ 163.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LA RECHERCHE GRAPHIQUE DU NOYAU CENTRAL D'UNE AIRE QUELCONQUE. — D'après ce qui précède, rien n'est plus facile que de construire le noyau central d'une aire donnée. On peut en construire graphiquement l'ellipse centrale O (*fig.* 112, *Pl. XXIV*). Menons le rayon OM jusqu'à sa rencontre en M avec le périmètre de l'aire donnée; soit m le point où cette ligne coupe l'ellipse centrale; si l'on construit la longueur

$$OG = \frac{\overline{Om}^2}{OM},$$

on aura un point G du périmètre du noyau central. On peut l'obtenir encore en construisant la corde tt' qui sous-tend les tangentes à l'ellipse centrale issues de M, et prenant le point G symétrique par rapport à O de celui où cette corde coupe le diamètre MO.

§ 164.

APPLICATION AUX AIRES LIMITÉES PAR DES POLYGONES FERMÉS. — Si le contour de l'aire donnée est un polygone de m côtés, le contour du noyau central sera un polygone d'un pareil nombre de côtés, formé par les droites symétriques des polaires des sommets du premier polygone relativement à l'ellipse centrale.

Parallélogramme. — Ainsi, soit donné (*fig.* 110, *Pl. XXIII*) un parallélogramme ABCD. Les lignes médianes EE′ et FF′ sont

(§ 151) deux diamètres conjugués de son ellipse centrale. On sait trouver (§ 145) les longueurs Oe, Oe', Of, Of' de ces diamètres. Il suffit pour cela de chercher les moments d'inertie du parallélogramme relativement à chacune des lignes EE′ et FF′.

Ayant ces diamètres, on trouve les points ε et φ du noyau central par les formules

$$O\varepsilon \times OE' = \overline{Oe}^2 \ (^*),$$

$$O\varphi \times OF' = \overline{Of}^2.$$

Prenant ensuite $O\varepsilon = O\varepsilon'$ et $O\varphi = O\varphi'$, le parallélogramme $\varepsilon\varepsilon'\varphi\varphi$ est le périmètre du noyau central cherché.

Triangle. — Soit un triangle ABC (*fig.* 113, *Pl. XXIV*). Menons la médiane AA′ et, par le centre de gravité O du triangle, conduisons une parallèle XX′ à la base BC. Les lignes AA′ et XX′ sont deux diamètres conjugués de l'ellipse centrale (§ 151). Connaissant les moments d'inertie relatifs à AA′ et XX′, on peut trouver (§ 145) les longueurs des diamètres conjugués dirigés suivant ces deux lignes et tracer l'ellipse centrale. Soient Oa', Ob', Oc' les demi-diamètres de cette ellipse dirigés suivant les médianes OA, OB, OC. On construira les longueurs

$$O\alpha = \frac{\overline{Oa'}^2}{OA'},$$

$$O\beta = \frac{\overline{Ob'}^2}{OB'},$$

$$O\gamma = \frac{\overline{Oc'}^2}{OC'}.$$

Le triangle $\alpha\beta\gamma$ est le contour du noyau central du triangle ABC.

§ 165.

Ellipse et cercle. — Nous avons vu que l'ellipse centrale d'une ellipse est une autre ellipse semblable et dont le rapport de simili-

(*) Pour avoir ε, décrivez une demi-circonférence sur OE comme diamètre; de O comme centre, décrivez l'arc de cercle eK jusqu'à sa rencontre en K avec les demi-circonférences OE; enfin de K abaissez une perpendiculaire sur Oe. Le pied de cette perpendiculaire est le point cherché.

tude est $\frac{1}{2}$ (§ 158). Soient OM un rayon de l'ellipse donnée (*fig.* 114, *Pl. XXIV*), Om le même rayon de l'ellipse centrale. On aura

$$Om = \frac{OM}{2},$$

Soit μ' le point de ce rayon appartenant au contour du noyau central : on aura

$$O\mu' = \frac{\overline{Om}^2}{OM} = \frac{OM}{4};$$

donc le noyau central d'une ellipse est une autre ellipse semblable et semblablement placée, le rapport de similitude étant $\frac{1}{4}$.

D'après cela, le noyau central d'un cercle est un autre cercle dont le rayon est égal au quart du rayon du premier.

Anneau elliptique ou circulaire. — Un anneau formé de deux ellipses semblables et semblablement placées, dont les demi-axes sont a et b pour l'une et ma et mb pour l'autre, admet (§ 158) pour ellipse centrale une ellipse semblable aux deux précédentes et semblablement placée et dont les demi-axes sont

$$\frac{1}{2}a\sqrt{1+m^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}b\sqrt{1+m^2},$$

et pour courbe limitant le noyau central une troisième ellipse semblable aux précédentes et semblablement placée et ayant pour axes

$$\frac{a^2(1+m^2)}{4a} = \frac{a(1+m^2)}{4} \quad \text{et} \quad \frac{b^2(1+m^2)}{4b} = \frac{b(1+m^2)}{4}.$$

Un anneau compris entre deux cercles concentriques de rayons R et mR admet un noyau central limité par un cercle de rayon

$$\frac{R}{4}(1+m^2).$$

QUATRIÈME SECTION.

COMPOSITION DES FORCES DANS L'ESPACE ET FIGURES RÉCIPROQUES QUI EN DÉCOULENT.

CHAPITRE XIX.

COMPOSITION DES FORCES DANS L'ESPACE.

§ 166.

LES FORCES DE L'ESPACE N'ADMETTENT PAS EN GÉNÉRAL DE POLYGONES FUNICULAIRES. — La notion du polygone funiculaire, si utile dans la composition des forces situées dans un plan, n'a pas son analogue dans l'espace.

Étant donné un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan, on peut toujours trouver (§ 61 *bis*) une infinité de polygones tels, que les forces données, si on les suppose appliquées aux divers sommets de l'un de ces polygones, le maintiennent en équilibre, si on en rend les deux extrémités fixes.

De tels polygones n'existent pas, en général, à l'égard de forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace. En effet, s'il en existe un, chacun de ses sommets doit être en équilibre sous l'action de la force qui y est appliquée et des tensions des deux côtés adjacents. Il faut pour cela, d'après la règle du triangle des forces, que la ligne d'action de chaque force et les deux côtés du polygone qui concourent sur cette ligne soient dans un même plan. Si cette condition est remplie, on pourra décomposer chaque force en deux

suivant les deux côtés qui y concourent, ce qui remplacera le système des forces données par un système de forces équivalentes, toutes dirigées suivant les côtés du polygone funiculaire. Suivant chacun des côtés intermédiaires du polygone, seront dirigées deux forces qui devront être égales et opposées pour que le polygone demeure en équilibre lorsqu'on en fixe les deux extrémités.

Ainsi il faut : 1° que chaque force soit située dans le plan des deux côtés du polygone qui lui sont adjacents; 2° que les deux composantes des forces données, dirigées suivant chacun des côtés intermédiaires du polygone, soient égales et opposées.

Quand toutes les forces données sont situées dans un même plan, la première de ces conditions se trouve remplie d'elle-même et l'on peut alors d'une infinité de manières satisfaire à la seconde; mais, dans l'espace, la nécessité de satisfaire à la première suffit pour déterminer un polygone dès qu'un seul de ses côtés est donné, et alors la seconde ne peut en général pas être remplie. Ainsi soient (*fig.* 111, *Pl. XXIII*) les forces données

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad P_4, \ldots,$$

Proposons-nous de déterminer, s'il se peut, un polygone funiculaire dont $a_0 a_1$ soit un des côtés. Si, par les deux lignes $a_0 a_1$ et P_1, on fait passer un plan qui coupe P_2 en a_2, la ligne $a_1 a_2$ sera nécessairement le deuxième côté du polygone cherché; si, par cette ligne et par P_2, on fait passer un plan qui coupe P_3 en a_3, la ligne $a_2 a_3$ sera le troisième côté du polygone cherché, et ainsi de suite. Si maintenant on décompose chacune des forces données en deux, suivant les deux côtés qui y concourent, il n'y aura aucune raison pour que la composante de P_1 suivant le côté $a_1 a_2$ soit égale et opposée à celle de P_2 suivant ce même côté; pour que la composante de P_2 suivant le côté $a_2 a_3$ soit égale et opposée à celle de P_3 suivant le même côté, et ainsi de suite.

On voit donc qu'en général un système de forces, dans l'espace, n'admet pas de polygones funiculaires.

§ 167.

POLYÈDRE FUNICULAIRE DE RANCKINE, SA COMPLICATION. — Ranckine a considéré, à l'égard des forces de l'espace, ce qu'il a appelé des

polyèdres funiculaires. Le polyèdre funiculaire de Ranckine est fondé sur ce théorème facile à établir : *Des forces concourantes, normales aux faces d'un polyèdre fermé et proportionnelles aux aires de ces faces, forment un système en équilibre* (*). Mais la conception de Ranckine, qui conduit à représenter les forces par des aires et à considérer dans l'espace des figures formées d'une suite de *cellules polyédrales* accolées comme les cellules d'une ruche, n'a pas eu jusqu'ici d'applications : nous ne nous y arrêterons donc pas (**).

§ 168.

PYRAMIDE FUNICULAIRE. — Voici une autre extension du polygone funiculaire qui nous semble plus conforme à la nature des choses. Sans y attacher plus d'importance qu'il ne convient, tant du moins qu'on n'en aura pas déduit des conséquences graphiques faciles, nous l'exposerons en quelques mots, d'autant qu'elle nous fournira une démonstration simple du théorème fondamental de la composition des forces dans l'espace.

Nous ferons d'abord ces deux remarques évidentes.

Remarque I. — Une force peut toujours être décomposée en deux autres, dont l'une passe par un point donné O, et dont l'autre rencontre une droite donnée D.

Car, si C est la trace de la droite donnée sur le plan passant par O et par la ligne d'action F de la force donnée, et qu'on prenne sur cette dernière ligne un point quelconque a, on pourra toujours décomposer la force donnée suivant les lignes aO et aC, puisque ces lignes et la ligne F sont dans un même plan.

Remarque II. — On peut toujours décomposer une force F en trois autres : l'une donnée arbitrairement en grandeur, direction et sens ; la deuxième passant par un point donné, la troisième rencontrant une droite donnée.

(*) M. Chasles a démontré ce théorème dès 1829 dans le *Bulletin* de M. le baron de Férussac.

(**) La plus simple de ces figures serait composée des cinq tétraèdres ayant pour arêtes les dix lignes joignant cinq points de l'espace. Ce serait l'analogue de la figure plane, formée par les six lignes joignant quatre points d'un plan.

Car, prenant un point a sur la ligne d'action de la force F, on peut d'abord décomposer cette force en deux autres, dont l'une passe par a et soit égale en grandeur, direction et sens à une force donnée; la seconde composante sera alors entièrement déterminée, d'après la règle du parallélogramme des forces. Cette seconde composante pourra, à son tour, d'après la Remarque ci-dessus, être décomposée en deux, l'une passant par un point donné, l'autre rencontrant une droite donnée. La force F sera ainsi décomposée en trois, suivant les conditions indiquées.

Cela étant, soit un système de forces

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_i.$$

Ces forces sont représentées sur la *fig.* 111 (*Pl. XXIII*) où $i = 6$.

Prenons sur la ligne d'action de la force P_1 un point quelconque a_1, et décomposons cette force en trois autres : l'une suivant une ligne $a_1 a_0$, arbitraire en grandeur, direction et sens, la deuxième a_1 O passant par un point quelconque O de l'espace, la troisième $a_1 a_2$, rencontrant la ligne d'action de la force P_2. Soit a_2 ce point de rencontre; décomposons P_2 en trois : l'une suivant $a_2 a_1$ égale et opposée à la composante de P_1 dirigée suivant cette ligne, la deuxième passant par O, la troisième rencontrant la ligne d'action de la force P_3. Soit a_3 ce point de rencontre; décomposons P_3 en trois : l'une suivant $a_3 a_2$ égale et opposée à la composante de P_2 dirigée suivant cette ligne, la deuxième passant par O, la troisième rencontrant la ligne d'action de la force P_4.

On continuera ainsi jusqu'à la dernière force P_i qu'on décomposera en trois : l'une suivant $a_i a_{i-1}$ égale et opposée à la composante de P_{i-1}, dirigée suivant cette ligne, la seconde passant par le point O, la troisième rencontrant *la ligne arbitrairement donnée* $a_1 a_0$.

Nous avons donc substitué, au système des forces données, un système de forces équivalentes, les unes passant par le point O, les autres dirigées suivant les côtés du polygone $a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_i$. Les premières étant concourantes se composent en une seule (§ 42); celles qui sont dirigées suivant les côtés intermédiaires du polygone se détruisent comme étant deux à deux égales et opposées; celles qui sont dirigées suivant les deux côtés extrêmes du polygone se composent en une seule, puisque ces côtés se rencontrent. Le sys-

Digitized by Google

tème des forces données se trouve donc réduit à deux forces, dont l'une passe par le point arbitraire O. Ainsi, nous arrivons à ce théorème fondamental de la Statique :

Théorème. — *Des forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace peuvent être réduites à deux, dont l'une passe par un point arbitraire.*

Si nous considérons la pyramide ayant son sommet en O, et pour base le polygone $a_0 a_1 a_2 a_3, \ldots, a_i$ et qu'on fixe : 1° un point de chacun des côtés extrêmes de ce polygone; 2° le sommet O, la pyramide sera évidemment en équilibre sous l'action des forces données, puisque les forces passant par O et celles dirigées suivant les deux côtés extrêmes du polygone sont détruites par la fixité des trois points O, a_0, a_i et que les autres forces dirigées suivant les côtés intermédiaires du polygone se détruisent deux à deux. Cette pyramide a donc la plus grande analogie avec le polygone funiculaire, et on pourrait l'appeler la *pyramide funiculaire* relative au point O.

Si le système des forces données est en équilibre, alors les deux forces auxquelles on le réduit doivent être égales et opposées, ce qui exige que la résultante des forces passant par le point O et des deux forces dirigées suivant les côtés extrêmes du polygone funiculaire soient dans un même plan; en d'autres termes, la pyramide funiculaire sera, dans ce cas, fermée.

Si le point O passe à l'infini suivant une direction quelconque, la pyramide devient un prisme et la section du prisme par un plan quelconque (P) est un polygone funiculaire, à savoir, un des polygones funiculaires du système des forces données, projetées sur le plan (P), suivant une direction parallèle à l'arête du prisme.

Nous ne nous arrêterons pas davantage à ces considérations et à ces analogies de la pyramide funiculaire avec le polygone funiculaire, et nous passons de suite à l'étude des conséquences que l'on peut déduire de la réduction d'un système de forces à deux.

§ 169.

Théorème. — *On peut toujours réduire un système de forces à deux, dont l'une ait pour ligne d'action une droite arbitraire-*

ment donnée dans l'espace ; la ligne d'action de la seconde est alors entièrement déterminée.

En effet, soit D une droite arbitrairement donnée. Prenons sur D un point quelconque O (*fig.* 109, *Pl. XXIII*). On peut toujours (§ 168) réduire un système de forces à deux : R et $\mathfrak{R}$ dont l'une R passe par le point O. Par R et D faisons passer un plan qui rencontre $\mathfrak{R}$ en *a*. On peut décomposer R en deux, l'une suivant D, l'autre suivant O*a*. On peut composer cette dernière force avec $\mathfrak{R}$: soit Δ la ligne d'action de la résultante ; les forces R et $\mathfrak{R}$ sont ainsi remplacées par deux autres, dont l'une passe par la droite arbitrairement donnée D ; et l'on voit que la ligne d'action Δ de la seconde est entièrement déterminée.

Remarque. — A toute droite D de l'espace correspond ainsi, relativement à un système de forces données, une autre droite Δ et une seule, et il est clair que, réciproquement, à la droite Δ correspond celle D. Ces deux droites *réciproques* sont dites *conjuguées* ou *correspondantes* relativement au système des forces données.

§ 170.

Théorème. — *A deux droites concourantes correspondent deux autres droites concourantes dont le plan passe par le point de concours des premières.*

En effet, aux droites $\mathfrak{R}$ et Δ (*fig.* 109) qui concourent en *a*, correspondent les droites R et D qui concourent en O ; et le plan de R et D passe bien par le point *a*.

Inversement, aux droites R et D concourant en O, correspondent les droites concourantes $\mathfrak{R}$ et Δ, dont le plan passe par O.

Corollaire I. — A un polygone gauche correspond un autre polygone gauche ; si le premier polygone est fermé, le second l'est également.

Corollaire II. — A toutes les droites concourant en un point de l'espace, correspondent les droites d'un plan passant par ce point. Réciproquement, à toutes les droites d'un plan correspondent toutes les droites concourant en un point de ce plan.

§ 171.

DÉFINITIONS. — Le point où concourent toutes les droites conjuguées à celles qu'on peut tracer dans un plan est ce que nous appellerons le *foyer* de ce plan.

Inversement, le plan qui contient toutes les droites conjuguées à celles qui se croisent en un point de l'espace est ce que nous nommerons le *plan focal* de ce point.

Ainsi, relativement à un système de forces données, tout plan traversant l'espace renferme un foyer, et, inversement, parmi tous les plans se croisant en un point de l'espace, il en existe un, et un seul, qui est le plan focal de ce point.

§ 172.

Théorème. — *Le lieu des foyers d'un faisceau de plans passant par une droite est une autre droite, à savoir : la conjuguée de la première.*

En effet, le foyer d'un plan est (§ 171) la trace sur ce plan de la droite conjuguée à une droite quelconque D située dans ce plan : donc le lieu des foyers de tous les plans passant par D est la droite Δ conjuguée de D.

Corollaire. — En particulier, le lieu des foyers d'un faisceau de plans parallèles est une droite.

§ 173.

DÉFINITIONS. — Soit un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace. Concevons qu'on les transporte toutes en un même point. Les forces ainsi transportées auront une résultante unique qu'on appelle la *résultante de translation* des forces données.

Lemme. — Quelle que soit la manière dont on réduit un système de forces à deux, la résultante de translation de ces deux forces est la même que celle des forces données.

Digitized by Google

En effet, pour réduire un système de forces à deux, on ne fait que composer des forces entre elles et les décomposer suivant la règle du parallélogramme des forces. Si l'on fait sur les forces transportées exactement les mêmes compositions et décompositions que sur les forces prises dans les positions qu'elles occupent réellement, on réduira ces dernières à deux et les premières à deux autres qui leur sont égales et parallèles, et dont la résultante représentera indifféremment la résultante de translation des forces données ou celle des forces auxquelles on les a réduites.

Théorème. — *Deux droites conjuguées, relativement à un système de forces, se projettent sur un plan perpendiculaire à la résultante de translation de ces forces, suivant deux lignes parallèles.*

En effet, on peut (§ 169) concevoir les forces données réduites à deux, dirigées suivant les deux lignes conjuguées D et Δ que l'on considère. Si l'on transporte ces deux forces parallèlement à elles-mêmes en un point de l'espace et qu'on les compose suivant la règle du parallélogramme des forces, on obtiendra la résultante de translation des forces données. Or, si l'on projette les forces ainsi transportées sur un plan perpendiculaire à leur résultante, leurs projections seront évidemment deux forces égales et directement opposées. Donc, avant leur transport, ces forces se projetaient suivant deux forces égales, parallèles et de sens opposés formant un couple.

Les lignes d'action des deux forces du couple, c'est-à-dire les projections des droites conjuguées D et Δ, sont donc parallèles.

CHAPITRE XX.

POLYÈDRES RÉCIPROQUES.

§ 174.

Théorème. — *Étant donné un polyèdre, on peut toujours trouver un second polyèdre tel que les sommets de chacun de ces deux polyèdres soient, relativement à un système de forces données, les foyers des faces de l'autre, et qu'en outre les arêtes des deux polyèdres soient conjuguées : ces deux polyèdres sont dits réciproques.*

En effet, soit (P) un polyèdre : menons les plans focaux de ses différents sommets. Ces plans, par leurs intersections mutuelles, déterminent un second polyèdre (P′). Je dis d'abord que les arêtes de ce second polyèdre sont conjuguées de celles du premier ; car si (A) est une arête du polyèdre donné, dont a et b sont les extrémités, les plans focaux de a et b seront, par construction, deux faces du second polyèdre, et l'intersection de ces plans sera une arête de ce second polyèdre. Or, d'après le théorème du § 172, cette arête est conjuguée de celle (A).

Maintenant, les arêtes des deux polyèdres étant conjuguées, les arêtes conjuguées aux côtés d'une face plane du polyèdre donnée concourent en l'un des sommets du nouveau polyèdre, en sorte que ces sommets sont bien les foyers des faces du polyèdre donné.

Remarque I. — Si m, n, p représentent le nombre des arêtes, le nombre des sommets et le nombre des faces planes du polyèdre donné, on a, d'après un théorème d'Euler,

$$n + p - m = 2.$$

Si m', n', p' sont les nombres analogues pour le second polyèdre, on a

$$m' = n, \quad n' = m, \quad p' = p,$$

d'où, comme cela doit être,

$$n' + p' - m' = n + p - m = 2.$$

Remarque II. — Deux polyèdres réciproques sont inscrits et circonscrits l'un à l'autre.

§ 175.

Théorème. — *Les projections de deux polyèdres réciproques, relativement à un sytème de forces, sur un plan perpendiculaire à sa résultante de translation, sont des figures planes réciproques* (*).

Car ces projections ont (§ 173) leurs côtés correspondants parallèles; d'ailleurs à tout système d'arêtes concourantes de l'un des polyèdres réciproques, correspond, dans l'autre, un polygone plan fermé; donc à tout nœud de l'une des figures projetées correspond, dans l'autre, un polygone fermé.

Corollaire. — *Toute figure plane susceptible d'être regardée comme la projection d'un polyèdre admet une figure réciproque.*

Cette manière d'envisager les figures réciproques de la Statique graphique est due à M. Cremona. Elle conduit facilement aux principales propriétés de ces figures.

Ainsi considérons une pyramide ayant pour base un polygone plan fermé. Son polyèdre réciproque sera une seconde pyramide ayant pour base le polygone fermé réciproque des arêtes émanant du sommet S de la pyramide donnée, et pour sommet le foyer de la base de cette pyramide.

Si l'on projette ces deux pyramides, on aura deux figures réciproques (*fig.* 13 et 15, *Pl. III*), formées chacune d'un polygone fermé et de rayons partant des sommets de ces polygones. Si les pyramides se réduisent à des tétraèdres, on aura la figure formée par les six lignes qui joignent quatre points d'un plan et sa réciproque (*fig.* 13 et 13, *Pl. III*).

§ 176.

Considérons une pyramide ayant son sommet en O et pour base un polygone fermé *gauche*. Sa projection sera un polygone fermé

(*) Quand, dans ce qui va suivre, nous parlerons de projections de figures réciproques, il sera entendu que la projection aura toujours lieu sur un plan perpendiculaire à la résultante de translation du système de forces relativement auquel les figures sont réciproques.

Digitized by Google

et des rayons issus d'un point O (*fig.* 22, *Pl. VI*). Cherchons la réciproque de cette pyramide.

La réciproque des arêtes émanées du point O sera un polygone plan fermé P situé dans le plan focal de O. Les réciproques des côtés du polygone gauche formeront (§ 170) un autre polygone gauche dont les côtés passeront par les sommets du polygone P; car, si A et A′ sont deux arêtes consécutives issues de O, le côté du polygone gauche situé dans le plan de ces deux arêtes aura pour conjuguée une droite passant par l'intersection des conjuguées de A et de A′: donc la réciproque sera formée d'un polygone plan et de lignes passant par les sommets de ce polygone. Si nous la projetons, le polygone plan fermé P se projettera suivant un polygone fermé P′ et les côtés du polygone gauche se projetteront suivant des lignes partant des sommets de P′. Les côtés de P′ seront d'ailleurs parallèles aux rayons issus de O, et les autres lignes seront parallèles au polygone fermé de la figure. On voit donc que la réciproque se projettera suivant un système de lignes et le polygone funiculaire de ces lignes relativement au pôle O (*fig.* 22, *Pl. VI*).

§ 177.

Considérons maintenant un polygone gauche fermé dont les sommets soient mis à deux points O et O′ de l'espace. Les figures réciproques des arêtes émanées de O et O′ sont deux polygones plans P et P′ situés dans les plans focaux des points O et O′ et les réciproques des côtés du polygone gauche sont les droites qui joignent les sommets correspondants de P et P′: donc, en projetant les deux polyèdres, on aura, d'une part, un polygone fermé et les rayons issus de deux points O et O′, et d'autre part un système de lignes et leurs polygones funiculaires relatifs aux pôles O et O′. On voit d'ailleurs de suite que les points d'intersection des côtés correspondants de deux polygones funiculaires doivent être tous placés sur une droite parallèle à OO′; car, dans l'espace, les côtés correspondants des polygones P et P′ se coupent tous sur la ligne d'intersection des plans de ces polygones, laquelle ligne est conjuguée de celle OO′ (*fig.* 17 et 17, *Pl. IV*). Nous retrouvons donc ainsi le théorème établi au § 32.

Digitized by Google

§ 178.

Considérons enfin une portion quelconque de surface polyédrique, une sorte de calotte polyédrique dont le bord soit un polygone gauche fermé P. Joignons les sommets de ce polygone à un point O de l'espace. Cherchons la réciproque de la figure ainsi formée.

La réciproque du polygone gauche P est un autre polygone gauche fermé $\mathfrak{P}$ (§ 170) ; les réciproques des lignes issues de O et aboutissant aux divers sommets de P forment un polygone plan Π dont les sommets sont sur les côtés de $\mathfrak{P}$ (§ 170), en sorte que la réciproque de cette première partie de la figure se compose du polygone plan Π des divers sommets duquel partent les lignes formant les côtés d'un polygone gauche $\mathfrak{P}$.

Maintenant toute arête L de la surface polyédrale, aboutissant en un sommet du bord P, admettra pour réciproque une ligne $\mathfrak{L}$, partant d'un des sommets de $\mathfrak{P}$ (§ 170). On aura donc une série de lignes $\mathfrak{L}$ partant des sommets de $\mathfrak{P}$; de ces lignes $\mathfrak{L}$ partiront de nouvelles lignes, réciproques de celles qui, dans la figure proposée, rencontrent les lignes L, et ainsi de suite. Si l'on projette la figure donnée et sa réciproque, la première se projettera suivant une figure comme celle 64 (*Pl. XIII*), où O est la projection de O et où la projection P′ du bord P de la surface polyédrale donnée est indiquée par des lignes doubles.

La figure réciproque se projettera suivant une figure comme celle 64 (*Pl. XIII*). La projection Π′ du polygone plan Π est indiquée en pointillé : ce sont les lignes réciproques de celles issues de O, dans la *fig.* 64. Les lignes partant de Π′ sont les projections des côtés du polygone $\mathfrak{P}$; elles sont réciproques de celles indiquées en doubles lignes sur la *fig.* 64 : les autres lignes de la figure peuvent évidemment être considérées comme les lignes d'une ossature plane en charpente, et alors les lignes réciproques du polygone P′ peuvent être regardées comme les lignes d'action de forces agissant sur cette charpente et ayant pour grandeurs les côtés du polygone P′. Ces forces admettent alors le polygone pointillé Π′ pour polygone funiculaire relatif au pôle O; et comme la figure formée par la charpente, les lignes d'action des forces qui la sollicitent et les côtés du polygone funiculaire admet une figure réciproque, les forces dont il s'agit maintiennent la charpente en équilibre et les lignes de la figure

réciproque indiquent un mode de tension des barres de la charpente. Nous n'insisterons pas davantage sur cette nouvelle manière d'envisager les figures réciproques de la Statique graphique, après la théorie complète et élémentaire que nous en avons donnée dans le cours de cet Ouvrage.

CHAPITRE XXI.

MOMENT AUTOUR D'UN AXE DES FORCES DISTRIBUÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

§ 179.

Nous venons de faire la composition des forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace, comme nous avons fait précédemment celle des forces parallèles ou situées dans un plan, sans faire usage des moments. Cependant nous allons exposer ici brièvement la théorie des moments des forces autour d'un axe, comme nous avons exposé plus haut la théorie des moments autour d'un point, ou relativement à un plan. De même que ces derniers, les moments autour d'un axe se ramènent aux moments autour d'un point; par suite, leur construction graphique ne souffre aucune difficulté (§ 62).

On appelle *moment d'une force* autour d'une droite ou autour d'un axe le produit de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à la droite par la plus courte distance entre la ligne d'action de la force et la droite.

Cette plus courte distance est dite le *bras de levier* de la force autour de la droite.

On considère le moment d'une force autour d'une droite comme positif ou comme négatif, suivant que la force tend à faire tourner son bras de levier dans un sens convenu, ou en sens contraire.

On voit d'après cela qu'on peut encore définir en grandeur et en signe le moment d'une force autour d'une droite, le moment de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à la droite, autour du point d'intersection de ce plan et de la droite (§ 67).

Remarque I. — Le moment d'une force autour d'une droite,

comme le moment d'une force autour d'un point, est indépendant de la position qu'on attribue au point d'application de la force sur sa ligne d'action.

Remarque II. — Le moment d'une force autour d'une droite située dans un même plan avec la ligne d'action de cette force est nul ; et, réciproquement, si le moment d'une force autour d'une droite est nul, cette droite est nécessairement située dans un même plan avec la ligne d'action de la force.

§ 180.

Soit un système de forces concourantes ; projetons-les sur un plan perpendiculaire à une droite quelconque (L). Le moment de la résultante des forces projetées, autour du point d'intersection de la droite (L) avec le plan de projection, est égal à la somme des moments, autour du même point, des forces projetées. Ces derniers moments ne sont autres que les moments des forces données autour de la droite (L) ; et, comme la projection, sur un plan de la résultante d'un système de forces concourantes n'est autre que la résultante des forces projetées, le moment de cette dernière autour du point d'intersection de la droite (L) avec le plan de projection est égal au moment de la résultante des forces données autour de cette droite. Donc : *le moment autour d'une droite de la résultante d'un système de forces concourantes est égal à la somme des moments de ces forces autour de cette droite.*

§ 181.

Dans la réduction (§ 169) à deux d'un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace, on ne fait que trois sortes d'opérations : 1° composer entre elles des forces concourantes, ou décomposer une force en deux autres qui concourent en un point de sa direction ; 2° déplacer les points d'application de certaines forces sur leurs lignes d'action. Aucune de ces deux opérations n'altérant, d'après ce qui précède, la somme des moments des forces primitives, on a ce théorème :

Théorème. — *Quand on réduit à deux un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace, la somme des moments des deux résultantes autour d'une droite quelconque est*

égale à la somme des moments des forces primitives autour de cette droite.

§ 182.

Soit donné un plan quelconque; traçons-y une droite quelconque D. Nous pouvons toujours (§ 169) ramener un système de forces, quel qu'il soit, à deux, dont l'un ait la droite D pour ligne d'action. Soit Δ la ligne d'action de la seconde résultante; le foyer F du plan donné est (§ 172) son intersection avec la ligne Δ. Or une droite quelconque, située dans ce plan et issue du point F, est située dans un même plan avec chacune des deux droites D et Δ; donc (§ 179) le moment autour de cette droite de chacune des deux résultantes dirigées suivant D et Δ est nul. Il en est, par suite, de même de la somme des moments des forces données autour de la droite dont il s'agit : ainsi, étant donné un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace et un plan quelconque, il existe dans ce plan une infinité de droites telles que la somme des moments des forces données autour de chacune de ces droites soit nulle. Ces droites concourent toutes en un point F. Ce point est ce que nous avons appelé le *foyer* du plan relativement au système de forces données. Möbius l'appelait le *point nul* (*nul punct*) du plan, expression justifiée par la propriété que nous venons d'indiquer.

Réciproquement, étant donné un point F de l'espace, par ce point il passe une infinité de droites telles que la somme des moments d'un système de forces autour de ces droites soit nulle. Ces droites sont toutes situées dans un plan que nous appelons le *plan focal* du point F relativement aux forces données.

C'est par ces propriétés des moments des forces que M. Cremona définit le foyer et le plan focal (qu'il nomme *pôle* et *plan polaire*). Nous avons vu qu'on peut établir leurs propriétés sans faire usage des moments. On pourrait même les définir géométriquement en dehors de toute considération mécanique; car les droites D et Δ sont celles dont M. Chasles et M. Mannheim ont tiré un si grand parti dans l'étude géométrique du mouvement des systèmes invariables. Nous ne pouvons à cet égard que renvoyer aux Mémoires de M. Mannheim et à son Cours de Géométrie professé à l'École Polytechnique.

NOTES.

NOTE I.

SUR UNE MANIÈRE DE DÉDUIRE LES FIGURES RÉCIPROQUES DE LA STATIQUE GRAPHIQUE DE LA TRANSFORMATION PARABOLIQUE DE M. CHASLES.

Étant donné un polyèdre (P) et une surface du second degré, il ressort de la théorie des figures polaires réciproques qu'il existe un second polyèdre (P′) réciproque du premier, c'est-à-dire tel que les sommets de l'un de ces polyèdres sont les pôles, relativement à la surface donnée, des faces de l'autre, et que les arêtes des deux polyèdres sont des droites conjuguées.

Aux arêtes émanant d'un sommet de l'un des polyèdres correspond, dans l'autre, un polygone plan fermé.

Donc, si on projette les deux polyèdres sur un plan quelconque, on aura en projection deux figures planes, telles que chaque ligne de l'une ait une correspondante dans l'autre et une seule, et qu'à un système de lignes concourantes de chacune d'elles réponde un polygone fermé de l'autre. Ces deux figures seraient donc réciproques dans le sens que nous avons attaché à ce mot au § 31, si leurs lignes correspondantes étaient deux à deux parallèles, ou, plus généralement, si elles faisaient un angle constant; car alors il suffirait de faire tourner l'une des deux figures de cet angle, pour que deux lignes correspondantes devinssent parallèles et pour que les figures fussent réciproques.

Cette propriété de faire entre elles un angle constant n'appartient pas aux lignes correspondantes de nos figures, si la surface du se-

Digitized by Google

cond degré, par rapport à laquelle les polyèdres (P) et (P′) sont réciproques, a été prise au hasard, et si le plan sur lequel on les a projetés est lui-même quelconque; mais je dis qu'elle se trouve acquise si la surface, par rapport à laquelle on a fait la transformation polaire, est un paraboloïde de révolution, et si, de plus, le plan de projection est perpendiculaire à l'axe de ce paraboloïde.

En effet, M. Chasles a démontré en 1829 (*Bulletin de Férussac*) cette propriété très-simple et facile à vérifier : que la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe d'un paraboloïde de révolution, de la courbe de contact de ce paraboloïde avec un cône est un cercle ayant pour centre la projection du sommet du cône.

D'après cela, soient (d) et (δ) deux droites réciproques, relativement à un paraboloïde de révolution.

Supposons, pour fixer les idées, que la droite (d) soit extérieure au paraboloïde, en sorte que (δ) est la ligne de contact des deux plans tangents au paraboloïde menés par (d). Circonscrivons au paraboloïde un cône ayant son sommet en un point quelconque s de la droite (d) et soit t la trace de cette droite sur le plan de contact. Si nous projetons, sur un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, la courbe de contact et les deux lignes (δ) et (d), la projection de la courbe sera un cercle ayant la projection du point s pour centre, en sorte que la projection de (d) sera un diamètre (d') de ce cercle. Soit t' la projection du point t.

Si par le point t' on mène des tangentes au cercle, la ligne de contact de ces tangentes sera la projection (δ') de (δ); donc les droites (d') et (δ') sont perpendiculaires entre elles, puisque l'une est un diamètre d'un cercle et l'autre la corde de contact de deux tangentes issues d'un point de ce diamètre.

Ainsi, dans la transformation relativement à un paraboloïde de révolution, deux droites réciproques se projettent à angle droit sur un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde.

Par suite, les projections de deux polyèdres réciproques sont des figures telles, qu'à chaque ligne de l'une d'elles correspond une ligne perpendiculaire de l'autre et qu'à chaque système de lignes concourantes de l'une répond, dans l'autre, un polygone fermé. Il suffit donc de faire tourner l'une des figures d'un angle droit pour que les deux figures soient des figures réciproques de la Statique graphique. Une fois cette proposition établie, on en déduit immédiate-

ment, comme nous l'avons fait au chapitre XX, les principales propriétés des polygones funiculaires et des figures réciproques. On pourrait de cette façon exposer très-succinctement les principes de la Statique graphique; mais, bien que cette méthode n'ait rien que de très-élémentaire, nous avons préféré suivre une marche plus élémentaire encore, mettant les applications usuelles de la Statique graphique à la portée de tous ceux qui ne possèdent, en fait de Mathématiques, que les principes de Géométrie et de Statique enseignés dans les cours professionnels.

Digitized by Google

NOTE II.

MÉMOIRE SUR LA RECHERCHE DES TENSIONS DANS LES SYSTÈMES DE BARRES ÉLASTIQUES ET SUR LES SYSTÈMES QUI, A VOLUME ÉGAL DE MATIÈRE, OFFRENT LA PLUS GRANDE RÉSISTANCE POSSIBLE.

Objet et principaux résultats de ce Mémoire.

Soit un réseau de barres ou lignes élastiques liées entre elles par des articulations cylindriques ou sphériques : cylindriques, si toutes les barres sont situées dans un plan; sphériques, dans le cas contraire.

Aux divers points d'articulation ou *sommets* de la figure, sont appliquées des forces qui maintiennent le système en équilibre. On se propose de déterminer les tensions que ces forces développent dans les diverses barres.

Parfois la Statique seule suffit à résoudre ce problème; mais le plus souvent elle le laisse indéterminé et, pour en obtenir la solution, il est nécessaire d'avoir égard à l'élasticité de la matière ou des matières composant les barres.

Habituellement on détermine alors leurs tensions en faisant usage des principes de la Résistance des matériaux. Comme le problème est, de sa nature, déterminé, si l'on écrit séparément, pour chaque barre, toutes les équations que fournit la Résistance en ayant égard aux liaisons de cette barre avec toutes celles qu'elle rencontre, on obtient finalement autant d'équations qu'il y a de forces inconnues à déterminer. C'est cette méthode (dont on peut faire remonter l'idée première jusqu'à Euler) que suivait Navier, et depuis elle a été appliquée avec succès, notamment par M. de Saint-Venant (*) et M. Bresse (**).

(*) *Leçons de résistance des matériaux professées à l'École des Ponts et Chaussées*, 1837-1838. — Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple et à double courbure lu à l'Académie des Sciences le 30 octobre 1843.

(**) *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes* (1856). — *Cours de résistance des matériaux professé à l'École d s Ponts et Chaussées*. Dans

Mais cette marche, qui exige l'introduction, à titre d'inconnues auxiliaires, de toutes les actions mutuelles que les barres exercent les unes sur les autres, est toujours pénible et souvent très-difficultueuse dans la pratique.

Nous nous proposons d'indiquer ici une méthode qui offre le triple avantage d'être plus précise, d'une application plus simple, et de mettre en évidence quelques résultats généraux que les méthodes habituelles permettraient difficilement d'apercevoir.

Parmi ces résultats, nous indiquerons les suivants :

Un système de barres distribuées d'une manière quelconque dans un plan ou dans l'espace étant en équilibre sous l'action de forces données, nous cherchons d'abord à quelles conditions le système doit satisfaire pour que la Statique permette de déterminer les tensions de toutes les barres qui le composent; nous établissons qu'il faut, pour cela, et il suffit que la figure géométrique formée par les barres ne contienne pas de lignes *surabondantes*, c'est-à-dire qu'elle contienne au plus le nombre de lignes nécessaires pour la définir de forme.

La même proposition s'applique quand les points d'articulation des barres sont assujettis à certaines conditions, comme de demeurer fixes ou de se mouvoir sur des courbes ou des surfaces données. Dans ce cas, la figure ne doit pas contenir plus de lignes qu'il n'est strictement nécessaire pour la définir, *en ayant égard aux sujétions auxquelles elle est soumise.*

Nous cherchons ensuite comment, quand les barres sont élastiques, la théorie mathématique de l'élasticité permet de trouver leurs tensions dans les cas où la Statique les laisserait indéterminées. La proposition qui précède fournit pour cela une méthode générale extrêmement simple et commode.

Après ces préliminaires, nous abordons le problème le plus important au point de vue des applications : celui qui consiste à déterminer les sections d'un système de barres formant une figure géométrique donnée et soumis à des forces données, par la condition

---

son Mémoire de 1856, M. Bresse donne notamment une application aux ponts Vergnais, dont les constructeurs s'occupaient alors beaucoup; on y trouve aussi, pour la première fois, la démonstration de ce fait : que le nombre des équations fournies par la Résistance est nécessairement toujours égal à celui des indéterminées qu'elle introduit.

que toutes les barres tendues supportent même tension et toutes les barres pressées même pression, par unité de surface.

A en juger par les résultats obtenus en Résistance des matériaux, on serait porté à croire que ce problème est toujours possible et, au premier abord, on ne voit pas de raison pour qu'il en soit autrement; car il comporte autant d'équations du premier degré à satisfaire qu'il y a d'inconnues à déterminer.

Cependant la méthode que nous suivons indique qu'il est très-souvent impossible et parfois indéterminé; nous établissons à cet égard le théorème suivant :

1° *Pour qu'un système de m barres en équilibre sous l'action de forces données, puisse être constitué en solide d'égale résistance, il faut,* en général, *et il suffit* toujours *que la figure géométrique formée par les axes des barres ne contienne pas de lignes surabondantes.*

2° *Toutes les fois qu'une figure formée de m lignes et contenant k lignes surabondantes peut être constituée en solide d'égale résistance, elle le peut d'une k^{tuple} infinité de manières,* c'est-à-dire qu'on peut, dans ce cas, prendre arbitrairement (entre certaines limites) les sections de k barres, et, pourvu que les sections des $m - k$ autres soient convenablement choisies, *toutes* les barres travaillent de la même manière.

C'est là une propriété très-remarquable sur laquelle nous reviendrons; mais arrêtons-nous d'abord à la première partie de la proposition que nous venons d'énoncer : elle conduit à cette conséquence nouvelle et importante, que les meilleures constructions, celles qui emploient le mieux la matière, sont, en général, les plus simples, celles qui ne sont pas surchargées de lignes et aussi les plus faciles à calculer, puisque, d'après la première proposition énoncée plus haut, ce sont celles dont les forces intérieures peuvent s'obtenir par le seul secours de la Statique.

Cette conséquence nous semble devoir donner une nouvelle importance à la Statique graphique, dont les procédés simples et expéditifs remplacent alors, avec tant d'avantages, les calculs laborieux et souvent inextricables de la Statique ordinaire; elle est d'ailleurs bien d'accord avec le sentiment des plus grands constructeurs américains, puisque tous ces gigantesques ponts qu'ils exé-

cutent depuis une vingtaine d'années sur leurs grands fleuves sont formés de systèmes articulés tellement disposés, que la Statique permette de déterminer les tensions des barres ou des câbles qui les composent. Nous verrons toutefois que le sentiment, si développé qu'il soit, ne suffit pas en pareille matière, et que, s'il a heureusement inspiré les ingénieurs des États-Unis en leur indiquant l'utilité de rechercher pour leurs grandes charpentes des formes simples, il ne les a pas amenés, en général, à découvrir, parmi ces formes, celles qui donnent lieu à la plus grande économie de matière, et que, sous ce rapport, les méthodes scientifiques et rigoureuses permettent d'apporter à leur œuvre des modifications importantes et vraiment avantageuses.

Il résulte de la seconde partie du théorème qui précède que si les figures sans lignes surabondantes sont, en général, les seules qui se prêtent à la résistance égale, il est pourtant des cas exceptionnels où une figure à k lignes surabondantes peut être aussi édifiée en forme de système d'égale résistance, et qu'alors il le peut d'une k^{tuple} infinité de manières, c'est-à-dire que le constructeur *dispose alors, dans certaines limites que le calcul assigne, des sections de k barres, sans perdre l'avantage de la résistance égale.* On comprend que ce soit là une faculté précieuse, et comme en réalité, dans la pratique, la figure géométrique que forme une charpente destinée à résister à des efforts donnés n'est jamais commandée d'avance, on comprend qu'on puisse souvent la disposer de façon à satisfaire aux conditions voulues pour qu'elle se trouve dans ce cas exceptionnel, de pouvoir être, d'une manière et, par suite, d'une infinité de manières, constituée en système d'égale résistance. Il y a lieu, dès lors, de se demander si ces figures, quand elles sont possibles, ne doivent pas être préférées à celles qui ne contiennent pas de lignes surabondantes, et si l'on ne pourrait pas mettre à profit l'indétermination que présentent les sections de leurs barres, pour réaliser une économie de matière. Le théorème suivant, que nous établissons, montre que cette question se résout par la négative :

Lorsqu'un système de barres contenant des lignes surabondantes satisfait aux conditions nécessaires pour qu'on puisse, d'une manière et, par suite, d'une infinité de manières, le constituer en solide d'égale résistance, il existe nécessairement un système formé par une partie seulement des barres données, ne contenant pas

de lignes surabondantes et tel que, disposé en système d'égale résistance, il dépense exactement le même volume de matière que le système complet.

Ainsi, même dans les cas exceptionnels où il n'y a pas désavantage à employer des figures à lignes surabondantes, il n'y a pas intérêt à le faire, en sorte que l'on peut dire que toujours les figures simples peuvent être choisies en toute sécurité (*); par exemple, une poutre simplement triangulée est préférable à la poutre à croix de Saint-André, celle-ci, préférable à la poutre à treillis, et ainsi de suite.

Puisqu'il en est ainsi, pour trouver, parmi toutes les figures possibles, celles qui, pour résister à des efforts donnés, par exemple à des charges verticales, dépensent le moindre volume de matière, il suffit de les chercher parmi les figures sans lignes surabondantes, c'est-à-dire, en vertu du premier des théorèmes énoncés dans ce qui précède, parmi celles auxquelles la Statique est applicable. Cette recherche n'offre donc aucune difficulté : elle exige seulement des calculs plus ou moins laborieux; nous l'avons faite pour les poutres les plus usitées en Europe et aux États-Unis. Nous devons quelques-uns des calculs relatifs à cette partie de notre travail à l'obligeance

(*) Nous ne prétendons pas que pratiquement il faille bannir d'une manière absolue les lignes surabondantes; mais nous posons la règle suivante, que nous croyons également conforme au bon sens et à la science : le fond d'une ossature en bois ou en métal doit être une figure sans lignes surabondantes dont les dimensions soient calculées d'après les principes stricts de la théorie et dont les pièces soient réellement reliées entre elles par articulations. Maintenant si, parmi ces pièces, surtout parmi celles comprimées, il en est qui sont trop longues, qui pourraient fléchir soit sous l'action de leur propre poids, soit par suite de la compression qu'elles subissent, il faut nécessairement les soutenir par d'autres pièces; mais ces pièces, qui peuvent être, elles, des lignes surabondantes, doivent recevoir des sections très-faibles, de façon à bien indiquer qu'elles sont là, non pour concourir à la résistance générale, mais comme simples soutiens des pièces qui y concourent. Et il faudrait bien se garder de donner à ces pièces secondaires des dimensions considérables; car par là, outre qu'on gaspillerait la matière, dans beaucoup de cas, on se tromperait si l'on croyait obtenir un surcroît de sécurité; on pourrait, au contraire, produire au point de vue de la résistance un effet plus nuisible qu'utile, en modifiant complétement la répartition théorique des forces, répartition d'après laquelle les pièces ont été calculées.

Un ouvrage remarquable où, croyons-nous, ces préceptes ont été suivis, est le pont d'Arcole. L'arc est rénni au couronnement du tympan par de simples triangles. Seulement les côtés trop longs de ces triangles sont soutenus par des barres secondaires et très-grêles; et c'est précisement parce que cet ouvrage est disposé d'une façon si rationnelle qu'il unit à une grande solidité un si haut degré d'élégance.

de notre ami M. Brune, ancien élève de l'École Polytechnique et de l'École des Beaux-Arts, professeur de construction à cette dernière École; qu'il nous soit permis de lui en exprimer ici nos remerciments.

Nous donnons un tableau comparé des volumes de matière nécessaires pour résister soit à une charge permanente, soit à une charge roulante, soit aux deux charges réunies, suivant qu'on emploie les diverses variétés des poutres triangulées, ou les poutres américaines les plus estimées, et nous arrivons à cette conséquence, qu'en général les nouvelles poutres armées à l'américaine, quelque séduisantes qu'elles paraissent, sont bien loin d'être les plus économiques, et que les systèmes simplement triangulés peu connus en France, mais depuis longtemps très-usités en Angleterre, sous le nom de *poutres de Warren,* sont bien préférables. Comme, d'un autre côté, il résulte de l'un des théorèmes énoncés que ces poutres sont préférables à celles en croix de Saint-André (qui contiennent des lignes surabondantes), que celles-ci sont préférables aux poutres à treillis plus chargées encore de lignes surabondantes, on peut conclure que les poutres simplement triangulées doivent, en principe, être préférées à toutes celles actuellement usitées. Les tableaux numériques que nous donnons montrent d'ailleurs que ce ne sont pas de légères, mais de très-grandes économies que l'on réalise, en suivant rigoureusement, en cette matière, les préceptes de la théorie.

De plus, par ces tableaux, on peut, en quelques instants, faire les devis comparatifs de plusieurs poutres prises parmi les meilleures et choisir, dans chaque cas, la plus économique de toutes.

I.

Conditions pour que la Statique suffise à déterminer les tensions d'un système de barres.

§ 1.

Pour arriver à résoudre d'une manière générale le problème de la recherche des tensions dans un système de barres en équilibre, nous chercherons d'abord à reconnaître dans quels cas la Statique seule peut en fournir la solution.

Pour cela, nous remarquerons que toute la Statique se résume en définitive dans le seul principe des vitesses virtuelles. Donc, si elle n'est pas impuissante à résoudre le problème que nous avons en vue, le principe des vitesses virtuelles devra donner tout à la fois et les conditions à remplir par les forces extérieures appliquées à un système de barres pour qu'elles demeurent en équilibre, et les tensions de ces barres.

Pour trouver les conditions d'équilibre entre les forces extérieures, il suffit évidemment de donner, aux points d'articulation des barres, tous les déplacements compatibles avec leurs liaisons, en supposant d'ailleurs les barres parfaitement inflexibles et inextensibles : ces conditions, nous ne nous en occuperons pas; nous les supposons satisfaites, puisque nous admettons que le système est en équilibre.

Pour trouver maintenant toutes les relations que le principe des vitesses virtuelles peut fournir entre les tensions des barres, concevons l'une d'elles, celle qui relie deux sommets A et B, coupée près de chacune de ses extrémités; l'équilibre ne sera pas troublé si, aux deux points A et B et suivant la ligne AB, on applique deux forces égales et contraires, égales à la tension de la barre coupée.

Donnons au système privé de la barre AB tous les déplacements compatibles avec ses liaisons, en supposant les barres qui la composent parfaitement rigides. Ceux de ces déplacements qui ne modifient pas la distance entre les points A et B sont ceux qu'on a déjà dû donner pour trouver les conditions d'équilibre entre les forces extérieures; ils fourniront des équations où n'entrera pas la tension de la barre AB : ils ne pourront donc pas servir à déterminer cette tension. Pour qu'il soit possible de la découvrir par le seul secours de la Statique, il faut que l'on puisse donner au système un déplacement virtuel altérant la longueur AB; réciproquement, toutes les fois qu'un tel déplacement sera possible, en lui appliquant le théorème des vitesses virtuelles, on trouvera une équation entre les forces extérieures et la tension cherchée, en sorte que cette tension se trouvera déterminée.

Ainsi, pour qu'on puisse trouver, par la Statique, la tension d'une barre AB, il faut et il suffit que la figure géométrique formée par les axes des barres soit telle qu'on puisse donner au côté AB de cette figure

Digitized by Google

un petit allongement virtuel, tous les autres côtés conservant leurs longueurs.

De là résulte que, pour que l'on puisse trouver, par la Statique seule, les tensions de toutes les barres, il faut et il suffit que la figure géométrique formée par leurs axes soit telle que chacun de ses côtés puisse recevoir un allongement virtuel, tous les autres conservant leurs longueurs; en d'autres termes, il faut et il suffit, si m est le nombre des barres, que les m côtés de la figure géométrique qu'elles forment puissent recevoir m allongements virtuels indépendants les uns des autres. Mais dire que les m côtés d'une figure géométrique peuvent recevoir m allongements infiniment petits, indépendants les uns des autres, sans que la figure cesse d'être possible, équivaut à dire que la figure peut être construite en prenant arbitrairement les longueurs de tous ses côtés; car cela exige qu'entre ces longueurs il n'existe aucune relation algébrique permettant de déduire l'une d'elles de la connaissance des autres. Donc :

Théorème I. — *Pour que la Statique puisse fournir les tensions d'un système de barres, il faut et il suffit que la figure géométrique formée par les axes de ces barres soit telle, qu'on puisse la construire en se donnant arbitrairement les longueurs de tous ses côtés.*

§ 2.

Considérons maintenant une figure qui ne remplisse pas cette condition, c'est-à-dire dont tous les côtés ne puissent pas être pris arbitrairement. Soit m le nombre total de ces côtés, et supposons que la figure soit entièrement définie par la connaissance de $m-k$ d'entre eux, en sorte qu'elle contient k lignes *surabondantes*, c'est-à-dire k lignes de plus qu'il n'est *strictement* nécessaire pour la définir. Alors il est clair que ses m côtés ne pourront subir que $m-k$ allongements virtuels distincts ou indépendants les uns des autres; la Statique ne fournira par suite, entre les tensions des barres, que $m-k$ relations et inversement, si, entre les tensions de m barres, la Statique ne fournit que $m-k$ relations, cela indique que ces m barres ne peuvent recevoir que $m-k$ allongements virtuels distincts, et que, par suite, leur figure géométrique est entièrement définie de forme par la connaissance de $m-k$ de ses côtés.

Ainsi :

Théorème II. — *Toutes les fois que la figure géométrique formée par un système de barres contient k lignes surabondantes, la Statique fournira k équations de trop peu pour définir les tensions de ces barres, et inversement, si la Statique fournit k équations de trop peu pour définir les tensions d'un système de barres, on est certain que la figure géométrique qu'elles forment contient k lignes surabondantes.*

Remarque. — En général, et sauf des exceptions qu'il serait difficile et qu'il n'y a pas lieu ici de préciser, les théorèmes qui précèdent permettent, à la simple inspection d'une figure, de voir si la Statique pourra ou non faire connaître les tensions de ses côtés.

Soient, en effet, m le nombre des côtés et n le nombre des sommets ou points d'articulation d'une figure.

Si la figure est plane, et que

$$m \leqq 2n - 3, \tag{1}$$

la figure peut être construite d'une ou d'une infinité de manières, et la Statique permet de trouver les tensions de ses côtés. En effet, elle est déterminée de forme et de position, si l'on se donne $2n$ conditions permettant de déterminer les $2n$ coordonnées de ses n sommets; elle est donc, *en général*, déterminée de forme par $2n - 3$ conditions, puisque trois conditions définissent sa position dans le plan.

Si

$$m = 2n - 3 + k, \tag{1 bis}$$

k étant un nombre positif, la figure contient k lignes surabondantes, et la Statique fournira k équations de trop peu entre les tensions de ses barres.

Si la figure n'est pas plane, elle pourra être construite si

$$m \leqq 3n - 6, \tag{2}$$

et elle renfermera k lignes surabondantes si

$$m = 3n - 6 + k; \tag{2 bis}$$

mais il ne faut pas perdre de vue que ces formules sont sujettes à exceptions, tandis que les théorèmes I et II n'en souffrent aucune.

Digitized by Google

§ 3.

Les théorèmes I et II s'appliquent non-seulement aux figures libres, mais aussi à celles dont les points d'articulation sont assujettis à certaines conditions, comme de demeurer fixes ou de glisser sur des courbes ou des surfaces données, ou de conserver entre eux des distances invariables; seulement, dans ce cas, on ne doit compter comme distincts que les allongements compatibles avec les sujétions des points d'articulation.

Dans ces sortes de figures, on aura à déterminer, outre les tensions des barres, les réactions des appuis; mais on peut remarquer que, les tensions une fois connues, les réactions des appuis s'ensuivent. Il suffit d'écrire que chacun des sommets non libres est en équilibre sous l'action : 1° des forces extérieures qui y sont directement appliquées; 2° des tensions des barres qui y aboutissent; 3° de la réaction qu'il subit de la part de son appui. On obtient ainsi trois équations qui fourniront les trois composantes de cette réaction. Ainsi :

Théorème III. — *Si l'on peut construire, en prenant arbitrairement les longueurs de tous ses côtés, une figure formée par m barres sans cesser de satisfaire aux conditions auxquelles sont assujettis les sommets de la figure, la Statique permet de trouver les tensions de toutes ces barres et les réactions de leurs appuis.*

Mais si, en ayant égard aux conditions auxquelles sont assujettis les sommets, la connaissance de $m-k$ des m côtés de la figure suffit à la définir, la Statique fournira k équations de trop peu pour déterminer les tensions des barres et les réactions de leurs appuis.

Remarque I. — Une conséquence immédiate de ce théorème, c'est que, si l'on sait trouver les tensions des barres d'une figure libre, on peut encore trouver ces tensions ainsi que les réactions des appuis, toutes les fois que la figure est assujettie à des conditions ne faisant que déterminer en tout ou en partie sa position dans l'espace sans influer sur sa forme.

Cette conséquence était facile à prévoir, car les conditions dont il s'agit peuvent être au plus au nombre de six dans l'espace et

Digitized by Google

de trois dans le plan; et, par suite, les équations d'équilibre entre les forces extérieures (au nombre de six dans l'espace et de trois dans le plan), permettent de déterminer *a priori* les réactions des appuis, et, une fois ces réactions connues, on peut les adjoindre aux forces données et regarder la figure comme libre.

Remarque II. — En général, et sauf des cas exceptionnels, le théorème ci-dessus permet, à l'inspection d'une figure, quelles que soient les conditions auxquelles elle est assujettie, de voir si la Statique pourra définir les tensions de ses barres et les réactions de ses appuis.

Soient, en effet, m le nombre des barres ou côtés de la figure, n le nombre de ses sommets et i le nombre des conditions auxquelles sont assujettis ses sommets. Si i est inférieur à 6 pour les figures de l'espace et à 3 pour les figures planes soumises à des forces situées dans leur plan, la Statique s'applique comme si la figure était libre, et il suffira de recourir aux formules (1) et (2). Si $i > 6$ dans l'espace ou > 3 dans le plan, la Statique permettra de résoudre le problème, si pour les figures de l'espace on a

$$m \leqq 3n - 6 - i \tag{3}$$

et pour les figures planes

$$m \leqq 2n - 3 - i; \tag{4}$$

elle fournira $k + i$ équations de moins que le nombre total des tensions et réactions inconnues, si

$$m = 3n - 6 + k \tag{3 bis}$$

pour les figures de l'espace, et

$$m = 2n - 3 + k \tag{4 bis}$$

pour les figures planes.

Exemples. — La figure plane 69, *Pl. XIV*, étant formée d'un réseau triangulé, contient évidemment tout juste le nombre de lignes nécessaires pour qu'on puisse la construire en prenant arbitrairement les longueurs de tous ses côtés. Donc si, en ses divers sommets, on applique des forces quelconques la maintenant en équilibre, on peut trouver, par la Statique, les tensions de ses divers

côtés; il en est de même si l'on supprime certains côtés de la figure (on admet, bien entendu, que les forces extérieures sont telles que cette suppression ne trouble pas l'équilibre); il en est encore de même si la figure, au lieu d'être libre, est assujettie, dans ses déplacements, à une, deux ou trois conditions; par exemple, si le sommet a est supposé fixe (ce qui vaut deux conditions) et le sommet e assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée; ces conditions, en effet, ne font que déterminer la position de la figure dans le plan sans influer sur sa forme; mais, si le point a est fixe et si les six autres points b, c, d, e, f, g sont assujettis à demeurer sur des courbes données, ce qui vaut huit conditions, alors la Statique deviendra impuissante à déterminer les tensions des barres et les réactions des appuis. Elle fournira cinq équations de trop peu.

La *fig.* 120, *Pl. XXIV*, représente une poutre triangulée (très-usitée en Angleterre et aux États-Unis, sous le nom de *poutre de Warren*). On voit, par les considérations qui précèdent, que la Statique permet de déterminer ses tensions toutes les fois qu'elle est libre ou qu'elle porte seulement sur un point fixe et sur un appui; mais si l'une de ses extrémités est fixe et qu'elle porte, en outre, sur $i - 2$ appuis, c'est-à-dire si elle est assujettie à i conditions, la Statique fournira $i - 3$ équations de trop peu pour définir les tensions de ses barres et les réactions de ses appuis.

La *fig.* 121, *Pl. XXIV*, représente une portion de poutre à croix de Saint-André. On voit que chaque croix est déterminée, si on se donne cinq des six lignes qui la composent; donc, entre les longueurs des six lignes d'une croix, il existe *une* relation. Si donc il y a k croix, il existera entre les lignes de la figure k relations; par suite, si la figure est libre ou assujettie à trois conditions, la Statique fournira k relations de trop peu pour définir ses tensions, et si elle est assujettie dans ses déplacements à i conditions ($i > 3$), par exemple à avoir un point fixe et à reposer en outre sur $i - 2$ appuis, la Statique fournira $k + i - 3$ équations de trop peu pour définir les tensions de ses barres et les réactions de ses appuis.

II.

Méthode générale pour trouver les tensions dans un système de barres élastiques lorsque la Statique laisse le problème indéterminé.

§ 4.

Voyons maintenant comment on pourra résoudre le problème de la recherche des tensions et des réactions des appuis pour des barres élastiques en nombre quelconque et soumises à des sujétions quelconques, lorsque, comme dans quelques-uns des exemples précédents, la Statique devient impuissante.

On commencera par écrire entre les tensions des barres toutes les relations que fournit la Statique; pour cela, il suffira de concevoir qu'on donne aux côtés de la figure géométrique formée par les barres tous les allongements virtuels compatibles avec les liaisons; le principe des vitesses virtuelles ne fournira alors que des relations où n'entreront pas les réactions des appuis et qui auront lieu entre les tensions des barres virtuellement allongées et les forces extérieures données qui agissent sur le système.

Si les relations ainsi obtenues étaient en nombre égal à celui des barres, le problème serait résolu sans qu'on ait besoin d'avoir égard à l'élasticité des barres. Si, au contraire, on obtient ainsi $m - k$ relations seulement entre les tensions des m barres de la figure, on peut être certain, d'après le théorème III, qu'il existe, entre les longueurs de ces barres, k relations géométriques permettant de déduire les longueurs de k de ces barres de la connaissance des longueurs des $m - k$ autres.

Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_m$$

les longueurs des m barres à l'état naturel, c'est-à-dire lorsqu'aucune force n'agit sur elles.

Sous l'influence des forces appliquées aux divers points d'articulation, ces barres prendront des allongements

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots, \alpha_m,$$

en sorte que leurs nouvelles longueurs seront

$$a_1 + \alpha_1, \quad a_2 + \alpha_2, \ldots, a_m + \alpha_m.$$

Puisque entre ces longueurs il existe k relations algébriques, soit

$$(5) \qquad F(a_1 + \alpha_1, \quad a_2 + \alpha_2, \quad a_3 + \alpha_3, \ldots, \quad a_m + \alpha_m) = 0$$

une de ces relations.

Si t_i est la tension, ω_i la section et e_i le coefficient d'élasticité de la barre dont la longueur primitive était a_i et dont l'allongement est α_i, on aura, d'après les principes les plus élémentaires de la théorie mathématique de l'élasticité,

$$(6) \qquad \alpha_i = \frac{a_i t_i}{e_i \omega_i}.$$

Portant ces valeurs de α_i dans les k relations (5), ces relations auront lieu entre les tensions inconnues t_i, et, jointes aux $m - k$ relations, entre ces tensions, déjà fournies par la Statique, elles achéveront de les définir.

Les k relations ainsi obtenues ne seront, en général, pas linéaires. On peut les remplacer par des relations linéaires. A cet effet, observons qu'avant les allongements des barres il existait, entre leurs longueurs, k relations que l'on obtiendra en faisant dans les équations (5)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0,$$

ce qui donne

$$(7) \qquad F(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) = 0.$$

Retranchons ces équations des équations correspondantes (5), en négligeant les quantités de l'ordre du carré des allongements α_i, ce qui est permis, dans la limite d'approximation que comporte la théorie mathématique de l'élasticité.

Si l'on fait, pour abréger,

$$F(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) = F,$$

on aura

$$(8) \qquad \frac{dF}{da_1}\alpha_1 + \frac{dF}{da_2}\alpha_2 + \ldots + \frac{dF}{da_m}\alpha_m = 0$$

et, à cause de (6),

$$(9)\qquad \frac{dF}{da_1}\,a_1\,\frac{t_1}{e_1\omega_1}+\frac{dF}{da_2}\,a_2\,\frac{t_2}{e_2\omega_2}+\ldots+\frac{dF}{da_m}\,a_m\,\frac{t_m}{e_m\omega_m}=0.$$

Telles sont les k relations à joindre à celles fournies par la Statique pour définir les tensions t_i.

Remarque I. — Toutes les équations qui fournissent les tensions étant linéaires, on voit que, si deux systèmes de forces agissent simultanément aux divers sommets d'une figure, les tensions qu'elles produisent sur ses divers côtés s'obtiennent en additionnant celles que produiraient chacun des deux systèmes de forces agissant successivement.

Remarque II. — Lorsque la Statique seule suffit à déterminer les tensions d'un système de barres, ces tensions ne dépendent que de la forme géométrique de la figure formée par les axes des barres; mais, lorsque la Statique laisse les tensions indéterminées et que, pour achever de les définir, il faut avoir égard à l'élasticité de la matière, elles dépendent non-seulement de la forme géométrique de la figure que forment les barres, mais aussi des sections ω_i de ces barres et de leurs coefficients d'élasticité e_i. Dans le premier cas, si l'on vient à altérer les sections des barres, leurs tensions n'en sont pas modifiées, mais seulement l'allongement élastique de chacune d'elles; dans le second, on peut, d'une infinité de manières, altérer les tensions des diverses barres en modifiant convenablement leurs sections.

§ 5.

Pour donner un exemple de l'application de cette méthode, supposons (*fig.* 116, *Pl. XXIV*) que, dans un mur vertical ZZ', on prenne un nombre quelconque p de points fixes a_0, a_1, a_2, a_3, ..., d'où l'on fait partir des tiges élastiques concourant en un point A, et qu'en ce point on applique une force R; on demande de trouver les tensions que cette force produit sur les tiges.

Comme la force donnée R et les tensions inconnues concourent toutes au même point, la Statique ne fournit que deux équations d'équilibre; elle ne permet donc de trouver les tensions des p barres que dans le cas particulier où elles sont au nombre de $p=2$; dans ce

cas, en effet, il suffit de décomposer la force R, suivant les directions des deux barres, pour obtenir leurs tensions. Si l'on veut trouver les tensions, dans le cas général d'un nombre quelconque de barres, il suffit de remarquer que les longueurs de deux barres seulement sont arbitraires; que, ces longueurs une fois données, le point A est déterminé, et, par suite, les longueurs de toutes les autres barres le sont aussi. Donc, entre les longueurs des p barres, il existe $p-2$ relations géométriques.

Si, par exemple, les points $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont équidistants, on voit de suite qu'entre les longueurs b_i, b_{i+1}, b_{i+2} de trois barres consécutives il existe la relation

$$b_i^2 + b_{i+2}^2 = 2b_{i+1}^2 + 2a^2,$$

en appelant a la distance constante $a_1 a_2 = a_2 a_3 = \ldots$ entre deux points fixes consécutifs; et si $\beta_i, \beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \ldots$ sont les allongements élastiques des barres, on a, après la déformation de la figure,

$$(b_i + \beta_i)^2 + (b_{i+2} + \beta_{i+2})^2 = 2(b_{i+1} + \beta_{i+1})^2 + 2a^2.$$

En retranchant l'avant-dernière égalité de la dernière et négligeant les carrés des allongements,

$$(a) \qquad b_i \beta_i + b_{i+2} \beta_{i+2} = 2b_{i+1} \beta_{i+1}.$$

Or la formule (6) donne

$$\beta_i = \frac{b_i t_i}{e_i \omega_i},$$

en appelant t_i la tension de la barre de longueur b_i, de section ω_i, et au coefficient d'élasticité e_i.

Donc la relation (a) devient

$$(b) \qquad b_i^2 \frac{t_i}{e_i \omega} + b_{i+2}^2 \frac{t_{i+2}}{e_{i+2} \omega_{i+1}} = 2b_{i+1}^2 \frac{t_{i+1}}{e_{i+1} \omega_{i+1}},$$

d'où ce théorème :

Le produit de la tension d'une tige par unité de surface et par unité du coefficient d'élasticité par le carré de sa longueur est la moyenne des produits analogues pour les deux tiges adjacentes.

Ce théorème donne une relation entre les tensions de trois tiges consécutives quelconques; il fournit donc entre les tensions des

p tiges $p-2$ relations qui, jointes aux deux relations de la Statique, permettent de déterminer toutes les tensions. Les équations ainsi obtenues se résolvent d'ailleurs, quel qu'en soit le nombre, d'une façon très-simple.

On satisfait en effet, quel que soit le nombre entier i, aux $p-2$ relations (b) par l'expression générale

$$b_i^2 \frac{t_i}{e_i \omega_i} = iA + B, \tag{10}$$

où A et B sont deux constantes arbitraires. On a donc ainsi l'expression de toutes les tensions au moyen des deux indéterminées A et B, que l'on détermine en portant les valeurs t_i ainsi obtenues dans les deux équations fournies par la Statique.

§ 6.

Prenons encore (*fig.* 115, *Pl. XXIV*) la figure formée par un rectangle et ses deux diagonales.

Aux quatre sommets du rectangle sont appliquées des forces f, f_1, f_2, f_3, situées dans le plan du rectangle et maintenant la figure en équilibre. On demande de trouver les tensions des six côtés de la figure.

En écrivant que chacun des quatre sommets du rectangle est séparément en équilibre sous l'action de la force qui y agit et des tensions des barres qui y aboutissent, on aura en tout huit équations; mais, comme les quatre forces f, f_1, f_2, f_3 satisfont à trois équations d'équilibre, ces huit équations se réduiront à cinq distinctes. Comme il y a six tensions à déterminer, la Statique fournira donc une équation de trop peu, ce qui doit être, comme nous l'avons vu dans les exemples cités au § III. Mais il est évident qu'entre les six côtés de la figure il existe une relation géométrique; par suite, il en existe une entre les allongements élastiques de ses côtés et leurs longueurs primitives. Cette relation, des plus faciles à obtenir, est

$$a(\alpha + \alpha_1) + b(\beta + \beta_1) = c(\gamma + \gamma_1),$$

en appelant a la longueur primitive des côtés opposés AB et CD et α, α_1 leurs allongements élastiques; b la longueur primitive des

côtés opposés AC et BD et β, β_1 leurs allongements; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ la longueur des diagonales, γ, γ_1 leurs allongements. En remplaçant, dans cette formule, les allongements élastiques par les tensions correspondantes, au moyen de l'expression (6), on obtient la sixième équation cherchée entre les tensions des barres.

La *fig.* 117, *Pl. XXIV*, donne un type de pont très-usité aux États-Unis, pour des ouvertures allant jusqu'à 20 et 25 mètres. Connaissant les charges verticales qu'il doit porter, et, par suite, les réactions Q_1 et Q_2 des appuis, la Statique fournit immédiatement les tensions r_0, r_1, r_4, r_5 des quatre barres extrêmes; et les considérations qui précèdent fournissent les six équations donnant les six tensions $r_2, r_3, s_1, s_2, t_1, t_2$ des barres intermédiaires.

Si l'on accole ces rectangles avec leurs diagonales en nombre quelconque, on aura la poutre très-usitée à croix de Saint-André (*fig.* 121, *Pl. XXIV*). Il suffira d'appliquer à chacune des croix les considérations qui précèdent, pour obtenir en toute rigueur les forces élastiques que développent dans une telle pièce des forces données.

Il n'est pas nécessaire, quant à présent, d'entrer dans plus de détails à ce sujet; nous verrons que ce serait sans utilité dans les applications.

III.

Propriétés générales des sytèmes d'égale résistance.

§ 7.

On a, pour l'établissement de toutes les grandes charpentes, à résoudre le problème suivant : déterminer les sections ω_i d'un système de barres soumis à des forces données, de façon : 1° que si toutes les barres sont composées de la même matière, leur tension par unité de surface $\frac{t_i}{\omega_i}$ soit la même dans toutes les barres tendues, et leur pression par unité de surface, la même dans toutes les barres comprimées; 2° que si les barres sont composées de matières différentes, la tension par unité de surface et par unité du coefficient d'élasticité $\frac{t_i}{e_i \omega_i}$ soit la même pour toutes les barres tendues, et la

compression par unité de surface et par unité du coefficient d'élasticité, la même dans toutes les barres comprimées.

Ainsi, si ε' et ε'' sont deux nombres positifs qu'on se donne d'après la nature de la matière employée et qui sont égaux si l'on regarde la matière comme résistant également bien à l'extension et à la compression, on devra avoir pour toutes les barres tendues

$$\frac{t_i}{e_i \omega_i} = \varepsilon', \tag{11}$$

et pour les barres comprimées

$$\frac{-t_i}{e_i \omega_i} = \varepsilon'', \tag{11 bis}$$

en regardant les compressions comme des tensions négatives.

Si m est, comme précédemment, le nombre des barres, le nombre total des inconnues est ici $2m$, à savoir m tensions t_i et m sections ω_i. Le nombre des équations à satisfaire est aussi de $2m$, à savoir les m équations qui existent entre les tensions t_i et les forces extérieures, équations que nous savons trouver; 2° les équations (11) et (11 *bis*) également au nombre de m, puisqu'il y en a une et une seule, applicable à chaque barre. Il semble donc que le problème doive, en général, être possible et déterminé. Nous allons voir pourtant qu'il n'en est pas ainsi. Le problème est possible et déterminé toutes les fois que la Statique seule suffit à trouver les tensions des barres; car, dans ce cas, les m équations qui ont lieu entre ces tensions sont indépendantes des sections ω_i; elles peuvent donc être résolues séparément; ces équations, par leur nature même, ne sauraient d'ailleurs être ni incompatibles ni indéterminées, puisque nous admettons que les conditions d'équilibre entre les forces extérieures agissant sur le système sont remplies. On connaîtra donc les tensions positives ou négatives de toutes les barres; et en portant les valeurs des premières dans l'équation (11) et les valeurs des dernières dans l'équation (11 *bis*), on obtiendra les sections ω_i des barres. Les équations (11) et (11 *bis*) fourniront d'ailleurs, comme cela doit être, pour toutes les inconnues ω_i, des valeurs positives, puisque e_i, ε' et ε'' sont des nombres positifs et qu'on devra recourir à l'équation (11) ou à l'équation (11 *bis*) selon que t_i sera positif ou négatif.

Les choses se passeront tout autrement lorsque le système au-

quel on a affaire contient un certain nombre k de lignes surabondantes et que, par suite, en vertu du théorème III, la Statique ne fournira, entre les m tensions des barres, que $m-k$ équations. Les k autres équations, fournies alors par la théorie mathématique de l'élasticité, sont celles (9), c'est-à-dire

$$(12)\qquad \frac{dF}{da_1}a_1\frac{t_1}{e_1\omega_1}+\frac{dF}{da_2}a_2\frac{t_2}{e_2\omega_2}+\cdots+\frac{dF}{da_m}a_m\frac{t_m}{e_m\omega_m}=0.$$

Elles ne contiennent donc les $2m$ inconnues t_i et ω_i que par les m rapports $\frac{t_i}{\omega_i}$; les m équations (11) et (11 *bis*) ne les contiennent aussi que sous cette forme; donc, entre ces m rapports $\frac{t_i}{\omega_i}$, on aura $m+k$ équations; ces équations seront donc incompatibles, sauf dans les cas exceptionnels où elles se réduisent à m. Si cela a lieu on n'aura plus à satisfaire qu'à ces m équations et à celles au nombre de $m-k$, fournies par la Statique, soit en tout à $2m-k$ équations; et comme on dispose de $2m$ inconnues, le problème présentera une k^{tuple} indétermination. Ainsi :

Théorème IV. — *Pour qu'un système de barres en équilibre sous l'action de forces données puisse être édifié en solide d'égale résistance, il faut,* en général, *et il suffit* toujours *qu'il ne contienne aucune ligne surabondante.*

Dans le cas exceptionnel où un système contenant des lignes surabondantes peut devenir d'égale résistance, il le peut d'une infinité de manières, c'est-à-dire qu'on peut, d'une infinité de manières, modifier les sections de ses barres sans qu'il cesse d'être d'égale résistance.

§ 8.

Maintenant si on veut avoir les conditions auxquelles doit satisfaire un système de barres, pour se trouver dans le cas exceptionnel de pouvoir devenir d'égale résistance, à l'égard d'un système de forces données agissant sur lui, il faut porter dans les k équations (12) les valeurs (11) ou (11 *bis*) des $\frac{t_i}{\omega_i}$, à savoir : les valeurs (11) pour les barres tendues et celles (11 *bis*) pour les barres comprimées. Affectons, dans ce qui va suivre, l'indice i à l'une quelconque

des barres tendues, et l'indice j à l'une quelconque des barres comprimées; alors, en portant les valeurs (11) ou (11 *bis*) dans les k équations (12), les k équations de condition qui en résulteront pourront se mettre sous la forme suivante :

$$(13) \qquad \varepsilon' \Sigma \frac{dF}{da_i} a_i - \varepsilon'' \Sigma \frac{dF}{da_j} a_j = 0,$$

le premier Σ se rapportant à toutes les barres tendues, le second à toutes les barres comprimées.

Mais rien n'indique à l'avance quelles sont les barres qui se trouvent dans le premier ou dans le second de ces deux cas. Si l'on imagine toutes les combinaisons qu'il est possible de faire sur la répartition entre les barres tendues et celles comprimées, chacune de ces combinaisons donnera lieu à un système particulier d'équations (13), et pour que le problème de la résistance égale soit possible d'une manière, et par suite d'une infinité de manières, il *faut* (nous verrons bientôt que cela ne suffit pas toujours) que l'un au moins de ces systèmes d'équations se trouve satisfait de lui-même.

Le nombre de ces systèmes, dont l'un au moins doit être ainsi identique, est de 2^{m-k}. En effet, on ne peut se donner arbitrairement les signes des tensions que de $m-k$ barres; car les m équations (12) déterminent alors elles-mêmes les signes des autres. Or si, pour $m-k$ barres, le nombre des combinaisons entre les barres tendues et celles comprimées est A, il est 2A pour $m-k+1$ barres; car la barre que l'on ajoute peut être supposée successivement tendue ou pressée, et chacune de ces deux hypothèses donnera lieu à A combinaisons. Or, pour $m-k=1$, on a évidemment $A=2$; donc, pour $m-k=2$, on a $A=2^2$; pour $m-k=3$, $A=2^3$, et ainsi de suite. On a donc bien 2^{m-k} systèmes d'équations, et, pour que l'égale résistance soit possible, il est *nécessaire* que l'un au moins de ces systèmes soit identique.

Mais cette condition ou plutôt ces k conditions, puisque chaque système comporte k équations, ne sont pas toujours suffisantes pour que les barres données puissent recevoir des sections qui assurent leur égale résistance sous l'action d'un système de forces *donné*. En effet, supposons que, parmi les 2^{m-k} systèmes d'équations (13), un ou plusieurs soient identiques, et prenons l'un d'eux

que nous appellerons (A); par cela même que nous connaissons ce système (A), nous savons quelles hypothèses il a fallu faire sur les signes des tensions des barres pour qu'il soit satisfait; on connaît donc tous ces signes, et le problème à résoudre consiste à trouver les m tensions t_i et les m sections ω_i par les conditions suivantes : 1° que les tensions t_i aient toutes des signes déterminés et connus d'avance; 2° qu'elles satisfassent aux équations (11) pour les barres tendues, et à celles (11 *bis*) pour les barres pressées, ainsi qu'aux $m-k$ équations de la Statique, soit en tout à $2m-k$ équations. Le nombre des inconnues étant $2m$, k inconnues, par exemple, k des sections ω_i sont indéterminées; cependant elles ne sont pas tout à fait arbitraires: elles doivent être choisies de façon que les signes des tensions soient ce qu'ils doivent être en vertu de la condition 1°; et il n'en serait pas ainsi si on les prenait au hasard. Donnons, en effet, à k sections des valeurs arbitrairement choisies; au moyen des équations (11) ou (11 *bis*) on déterminera les tensions correspondantes, et il n'y a aucune ambiguïté sur celle des équations (11) ou (11 *bis*) qu'il faut employer pour chaque barre, les signes des tensions des barres étant connus. On aura donc déterminé ainsi les tensions de k barres, et ces tensions auront les signes qu'elles doivent avoir.

On portera les valeurs trouvées pour ces k tensions dans les $m-k$ équations de la Statique, et ces équations fourniront pour les $m-k$ tensions restantes des valeurs déterminées; mais, si l'on a pris au hasard les sections des k premières barres, ce qui revient à dire que, sauf leurs signes qu'on a respectés, on a pris les valeurs absolues des tensions de k barres arbitrairement, les valeurs que l'on trouvera pour les tensions des $m-k$ autres barres n'auront pas, en général, les signes spécifiés par les conditions 1°. On voit donc qu'on ne pourra pas prendre au hasard les sections, ou, si l'on veut, les valeurs absolues des tensions des k barres surabondantes; si ces valeurs sont indéterminées : 1° leurs signes sont déterminés; 2° leurs valeurs absolues doivent varier entre des limites telles que les $m-k$ tensions restantes aient aussi les signes qui leur conviennent.

Ces limites sont d'après cela faciles à définir. En effet, les $m-k$ équations de la Statique fournissent les tensions t_i de $m-k$ barres au moyen des tensions t_{m-k+i} des k autres, par des expressions li-

néaires de la forme

$$(14) \qquad t_i = C_0 + C_1 t_{m-k+1} + C_2 t_{m-k+2} + \ldots + C_k t_m,$$

où les coefficients C_i dépendent et de la forme géométrique de la figure formée par les barres et des forces extérieures qui les maintiennent en équilibre (*).

Chacune des $m - k$ tensions t_i devant avoir un signe déterminé, les k tensions t_{m-k+1} doivent satisfaire à $m - k$ conditions de la forme

$$(15) \qquad C_0 + C_1 t_{m-k+1} + C_2 t_{m-k+2} + \ldots + C_k t_m \gtrless 0,$$

auxquelles on doit ajouter, puisqu'on connait les signes de toutes les tensions t_{m-k+1}, k inégalités de la forme

$$(15\ bis) \qquad t_{m-k+1} \lessgtr 0,$$

soit en tout m conditions d'inégalité entre k indéterminées, k étant nécessairement plus petit que m.

Ainsi :

Théorème V. — *Pour qu'un système de m barres à k lignes surabondantes puisse, d'une manière, et par suite d'une infinité de manières, être constitué en système d'égale résistance à l'égard de forces données le maintenant en équilibre, il faut qu'il satisfasse : 1° à k conditions d'égalité ; 2° à m conditions d'inégalité.*

§ 9.

Les k conditions d'égalité (13) ne dépendent que de la forme géométrique de la figure des barres ; car le rapport $\frac{t''}{t'}$ entre la résistance à la compression et la résistance à l'extension de la matière est un simple nombre (nombre donné par l'expérience et que l'on suppose d'ailleurs d'ordinaire égal à 1).

On peut présenter, du reste, la théorie des systèmes d'égale résistance sous une forme un peu différente et qui fait bien ressortir la

(*) Il n'y a même que les coefficients C_0 qui dépendent des forces extérieures ; les autres C_1, C_2,... ne dépendent que de la forme géométrique de la figure.

signification géométrique des conditions d'égalité dont il s'agit.

Soit t_i la tension positive ou négative d'une barre de section ω_i, au coefficient d'élasticité e_i, et soit α_i son allongement positif ou négatif, on a

$$\alpha_i = a_i \frac{t_i}{e_i \omega_i}. \tag{16}$$

Si l'on introduit dans cette équation les conditions d'égale résistance (11) ou (11 *bis*), ces conditions deviendront

$$\alpha_i = a_i \varepsilon' \tag{17}$$

pour les barres tendues, et

$$\alpha_i = - a_i \varepsilon'' \tag{17 bis}$$

pour les barres comprimées. Ainsi le problème de la recherche d'un système d'égale résistance consiste à déterminer les sections ω_i d'un système de barres élastiques, de façon que, sous l'action de forces données le maintenant en équilibre, toutes les barres qui s'allongent s'allongent de la quantité donnée $a_i \varepsilon'$, et toutes celles qui se raccourcissent se raccourcissent de la quantité donnée $a_i \varepsilon''$.

Si la Statique suffit à déterminer les tensions des barres, on sait quelles sont celles qui s'allongent et celles qui se raccourcissent; on connaît donc d'avance les longueurs que devront prendre toutes les barres après la déformation élastique. Or, quelles que soient ces longueurs, la figure déformée pourra être construite, puisque, dans ce cas, elle ne contient (théorème I) aucune ligne surabondante; on pourra donc toujours déterminer les sections de barres, de façon que, sous l'action des tensions *connues* qu'elles subissent, elles prennent l'allongement voulu. Mais, si une figure à m barres contient k lignes surabondantes, alors, si l'on savait d'avance quelles sont les barres qui s'allongent et quelles sont celles qui se raccourcissent, ou si on le savait seulement pour $m - k$ barres, on connaîtrait les longueurs que devraient avoir ces barres après la déformation de la figure, et, par suite, on connaîtrait la forme que devrait prendre la figure déformée; car dire qu'une figure à m lignes contient k lignes surabondantes équivaut à dire que la forme de la figure est définie par la connaissance des longueurs de $m - k$ de ses côtés.

Mais, comme on ne sait pas ici d'avance quelles sont les barres qui s'allongent ou se raccourcissent, la Statique fournissant k équations de trop peu pour définir les tensions des barres, on peut faire, sur les signes des allongements et des raccourcissements des barres, un nombre fini 2^{m-k} d'hypothèses; il en résulte 2^{m-k} figures différentes que l'on peut construire en se donnant, conformément aux conditions (11) ou (11 *bis*), les allongements ou les raccourcissements de $m-k$ de leurs côtés; et pour que le problème de l'égale résistance soit possible, il faut que l'une au moins de ces figures soit telle, qu'en y traçant les k autres lignes (celles dont on ne s'est pas donné d'avance les allongements), les allongements de ces lignes soient aussi $a_i\varepsilon'$ quand ils sont positifs, et $-a_i\varepsilon''$ quand ils sont négatifs. C'est ce qui, en général, n'aura pas lieu; pour que cela ait lieu, il faut que la figure formée par les barres satisfasse à k conditions; ce sont précisément ces conditions qu'expriment les équations (13). On voit qu'elles sont purement géométriques. Si elles sont remplies, c'est-à-dire si une ou plusieurs des 2^{m-k} figures déformées peuvent être construites en admettant que toutes les barres se soient allongées ou raccourcies conformément aux conditions (17) ou (17 *bis*), la connaissance même de chacune de ces figures donne les signes des tensions de toutes les barres; il faut alors déterminer leurs valeurs absolues, de façon à satisfaire aux $m-k$ équations de la Statique, tout en respectant leurs signes connus d'avance, ce qui donne lieu aux m conditions d'inégalité spécifiées au théorème V.

§ 10.

Ces conditions d'inégalité, il faudrait bien se garder de les négliger ou de les regarder comme secondaires; elles indiquent souvent l'impossibilité du problème de l'égale résistance, alors même que les conditions d'égalité (13) sont satisfaites. En voici un exemple remarquable :

Supposons un système de m barres à k lignes surabondantes, libre ou assujetti, dans ses déplacements, à des conditions n'influant que sur sa position et non sur sa forme, cette forme étant d'ailleurs quelconque. Parmi les 2^{m-k} manières dont on peut concevoir cette figure déformée en supposant que toutes ses lignes a_i s'allongent

de $a_i \varepsilon'$ ou de $-a_i \varepsilon''$, il y en a deux qui sont toujours possibles : ce sont celles qu'on obtient en supposant que *toutes* les barres s'allongent ou que *toutes* se raccourcissent; car, si toutes les barres s'allongent, on obtient leurs nouvelles longueurs en multipliant leurs longueurs primitives par le rapport constant $1+\varepsilon'$; si toutes se raccourcissent, on obtient leurs nouvelles longueurs en multipliant leurs longueurs premières par le nombre constant $1-\varepsilon''$; dans les deux cas, tous les côtés de la figure primitive ayant varié dans un rapport constant, et cette figure contenant par hypothèse assez de lignes pour que, si ces lignes ne changent pas ou changent toutes dans un rapport donné, les angles qu'elles font entre elles ne sont pas modifiés, la figure déformée est semblable à la figure primitive, et comme celle-ci est donnée et, par conséquent, possible, la figure déformée l'est également comme lui étant semblable : donc, pour ces deux modes de déformation, les égalités (13) sont satisfaites. C'est, d'ailleurs, ce que l'on peut vérifier directement; car, si toutes les lignes s'allongent ou se raccourcissent, ces conditions deviennent, en supprimant, dans le premier cas, le facteur ε' commun à tous les termes et, dans le second, le facteur commun ε'' :

$$\frac{dF}{da_1} a_1 + \frac{dF}{da_2} a_2 + \ldots + \frac{dF}{da_m} a_m = 0,$$

équations qui sont satisfaites d'elles-mêmes; car les k relations (7) du § 4,

$$F(a_1, a_2, a_3, \ldots a_m) = F = 0,$$

étant géométriques et, par suite, homogènes, peuvent, en vertu du théorème sur les fonctions homogènes, s'écrire sous la forme

$$(c) \qquad \frac{dF}{da_1} a_1 + \frac{dF}{da_2} a_2 + \ldots + \frac{dF}{da_m} a_m = 0.$$

Ainsi, quel que soit le nombre de lignes surabondantes que renferme un système de barres libre ou assujetti dans ses déplacements à moins de six conditions pour les figures de l'espace, et à moins de trois pour les figures planes, on peut toujours, de deux manières au moins, satisfaire aux k conditions d'égalité nécessaires pour que la figure puisse, d'une infinité de manières, être constituée en système d'égale résistance; mais les deux modes de déformation qui en ré-

sultent pour la figure ne permettent pas, en général, de satisfaire aux conditions d'*inégalité* spécifiées par le théorème V, et voilà pourquoi, même pour les figures libres ou assujetties seulement au nombre de conditions que nous venons d'indiquer, le problème de la résistance égale n'est, en général, pas possible (*).

§ 11.

Pour mettre ce résultat en évidence par un exemple, prenons le bow-string indiqué sur la *fig.* 117, *Pl. XXIV*, et dont il a déjà été parlé au § 6.

Supposons-le chargé d'un poids unique P au droit de l'un des montants verticaux. Soient b et h la largeur et la hauteur du rectangle central, et $c = \sqrt{b^2 + h^2}$ sa diagonale; soient $r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$; t_1, t_2 les tensions des divers côtés de la figure. Les tensions r_0, r_1, r_4, r_5 se trouvent immédiatement par la Statique, en décomposant chacune des forces Q et Q_1 représentant les réactions des appuis, suivant les deux barres qui y concourent : passons donc à la détermination des tensions des six côtés de la croix de Saint-André.

La Statique fournit cinq relations entre ces six tensions. Pour les obtenir simplement, faisons, dans la figure, une section verticale xy qui coupe les quatre barres dont les tensions sont représentées par les lettres

$$r_3, \quad t_2, \quad t_1, \quad r_2,$$

et écrivons que la partie de droite de la figure est en équilibre sous l'action de ces tensions et de la réaction Q_1. En appliquant le théorème des moments autour du point A, on aura

$$(18) \qquad (r_2 + t_2 \cos\beta)\, h - Q_1 a = 0,$$

a désignant la longueur de la barre AC et β l'angle BA'B', de sorte

(*) Il est bon de remarquer toutefois qu'il existe une infinité de systèmes de forces à l'égard desquelles une telle figure peut devenir d'égale résistance; et, en général, dès qu'une figure satisfait aux conditions d'*égalité* (13), on peut concevoir une infinité de systèmes de forces tels, que les conditions d'inégalité (15) et (15 *bis*) soient satisfaites, tels, par conséquent, que ces forces puissent produire sur les lignes de la figure la résistance égale; mais un système de forces donné au hasard ne sera pas dans ce cas.

Digitized by Google

que

$$\cos\beta = \frac{b}{c}. \tag{19}$$

De même, le théorème des moments autour du point A′ donne

$$(r_3 + t_1 \cos\beta)h + Q_1 a = 0; \tag{20}$$

enfin le théorème des projections sur la verticale donne

$$(t_1 - t_2)\sin\beta = Q_1. \tag{21}$$

D'un autre côté, la projection, sur la verticale, des tensions agissant au point A, donne

$$t_1 \sin\beta + s_2 = 0, \tag{22}$$

et la projection analogue au point B

$$t_2 \sin\beta + s_1 = -P = -\frac{b+2a}{a} Q_1. \tag{23}$$

Si maintenant on appelle α_1 et α_2 les allongements élastiques des deux barres horizontales ; β_1 et β_2 les allongements des deux barres verticales ; γ_1 et γ_2 ceux des diagonales de la croix, la formule trouvée au § 6 donne

$$b(\alpha_1 + \alpha_2) + h(\beta_1 + \beta_2) = c(\gamma_1 + \gamma_2);$$

et, en appelant

$$\rho_2,\ \rho_2;\quad \sigma_1,\ \sigma_2;\quad \tau_1,\ \tau_2$$

les sections des six barres dont les tensions ont été désignées par

$$r_2,\ r_3;\quad s_1,\ s_2;\quad t_1,\ t_2,$$

et supposant, pour simplifier, toutes les barres formées de la même matière, en sorte que le coefficient d'élasticité disparaisse, il vient, en vertu de la relation (6), entre les allongements élastiques et les tensions correspondantes,

$$b^2\left(\frac{r_2}{\rho_2} + \frac{r_3}{\rho_2}\right) + h^2\left(\frac{s_1}{\sigma_1} + \frac{s_2}{\sigma_2}\right) = c^2\left(\frac{t_1}{\tau_1} + \frac{t_2}{\tau_2}\right). \tag{24}$$

Les six équations (18), (20), (21), (22), (23), (24) fournissent les six forces élastiques inconnues.

Si l'on veut que toutes les barres subissent même tension par unité de surface, il faut, dans la dernière équation, remplacer les

six quantités

$$(A)\qquad \frac{r_2}{\rho_2},\quad \frac{r_3}{\rho_3},\quad \frac{s_1}{\sigma_1},\quad \frac{s_2}{\sigma_2},\quad \frac{t_1}{\tau_1},\quad \frac{t_2}{\tau_2}$$

par $+\varepsilon'$ pour les barres tendues et par $-\varepsilon'$ pour les barres comprimées; et, pour que le problème de la résistance égale fût possible, il faudrait que l'équation ainsi obtenue fût satisfaite, soit par elle-même, soit en vertu de la relation

$$c^2 = b^2 + h^2,$$

existant entre les lignes de la figure. S'il était possible de disposer des sections des barres de façon que toutes les barres pussent être comprimées ou toutes tendues en les supposant, par exemple, toutes tendues, il faudrait remplacer les six quantités (A) par ε' qui disparaîtrait en facteur commun, en sorte que l'équation (24) se réduirait bien à l'identité

$$b^2 + h^2 = c^2.$$

Le problème de la résistance égale serait donc possible si l'on pouvait, en supposant toutes les barres tendues ou toutes comprimées, satisfaire aux équations (18), (20), (21), (22), (23) fournies par la Statique. Mais il est facile de voir que cela ne se peut pas. En effet on déduit de ces cinq équations

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} t_1 &= \frac{Q_1}{\sin\beta} + t_2,\\ s_1 &= -P - t_2\sin\beta,\\ s_2 &= -Q_1 - t_2\sin\beta,\\ r_2 &= Q_1\frac{a}{h} - t_2\cos\beta,\\ r_3 &= -Q_1\left(\frac{a}{h} + \cot\beta\right) - t_2\cos\beta, \end{aligned}\right.$$

qui montrent qu'il est impossible de supposer toutes les tensions positives ou toutes négatives; car, si t_2 est positif, s_1, s_2 et r_3 sont négatifs; si t_2 est négatif, r_2 est positif.

Digitized by Google

§ 12.

Allons maintenant un peu plus loin et montrons qu'il est impossible, quelque hypothèse qu'on fasse sur les tensions des barres, même en supposant certaines de ces tensions positives et d'autres négatives, de satisfaire aux conditions d'égale résistance. Pour cela, considérons les valeurs de t_2 qui annulent chacune des cinq tensions formant les premiers membres des équations (25); on trouve, en vertu de $\cos\beta = \frac{b}{c}$

$$(26)\quad \begin{cases} r_3 = 0 \quad \text{pour } t_2 = -Q_1\left[\frac{a}{h\cos\beta} + \frac{1}{\sin\beta} = -\frac{Q_1}{\sin\beta}\left(1 + \frac{a}{b}\right)\right], \\ s_1 = 0 \quad \text{pour } t_2 = -\frac{Q_1}{\sin\beta}\,\frac{b+2a}{a}, \\ \left.\begin{array}{l} t_1 = 0 \\ s_2 = 0 \end{array}\right\} \text{pour } t_2 = -\frac{Q_1}{\sin\beta}, \\ r_2 = 0 \quad \text{pour } t_2 = Q_1\frac{a}{h\cos\beta}. \end{cases}$$

De là, en supposant $1 + \frac{a}{b} > \frac{b+2a}{a}$, on déduit le tableau suivant :

t_2 VARIANT de	t_2 VARIANT à	TENSIONS positives.	TENSIONS négatives.	CONDITIONS CORRESPONDANTES fournies par l'équation (24) pour la possibilité de l'égale résistance.
$-\infty$	$-\frac{Q_1}{\sin\beta}\left(1+\frac{a}{b}\right)$	r_3, r_2, s_2, s_1	t_2, t_1	$2b^2\varepsilon' + 2h^2\varepsilon' + 2c^2\varepsilon'' = 0,$
$-\frac{Q_1}{\sin\beta}\left(1+\frac{a}{b}\right)$	$-\frac{Q_1}{\sin\beta}\,\frac{b+2a}{a}$	r_2, s_2, s_1	t_2, t_1, r_3	$b^2(\varepsilon'-\varepsilon'') + 2h^2\varepsilon' + 2c^2\varepsilon'' = 0,$
$-\frac{Q_1}{\sin\beta}\,\frac{b+2a}{a}$	$-\frac{Q_1}{\sin\beta}$	r_2, s_2	t_2, t_1, r_3, s_1	$b^2(\varepsilon-\varepsilon') + h^2(\varepsilon'-\varepsilon'') + 2c^2\varepsilon'' = 0.$
$-\frac{Q_1}{\sin\beta}$	0	r_2, t_1	t_2, s_2, r_3, s_1	$b^2(\varepsilon'-\varepsilon'') - 2h^2\varepsilon'' - c^2(\varepsilon'-\varepsilon'') = 0,$
0	$Q_1\frac{a}{h\cos\beta}$	r_2, t_1, t_2	s_2, r_3, s_1	$b^2(\varepsilon'-\varepsilon'') - 2h^2\varepsilon'' - 2c^2\varepsilon' = 0,$
$Q_1\frac{a}{h\cos\beta}$	$+\infty$	t_1, t_2	r_2, s_2, r_3, s_1	$-2b^2\varepsilon'' - 2h^2\varepsilon'' - 2c^2\varepsilon' = 0.$

Les équations de la dernière colonne peuvent s'écrire, à cause de $c^2 = b^2 + h^2$,

$$(27)\quad \begin{cases} (\varepsilon' + \varepsilon'')(2b^2 + 2h^2) = 0. \\ (\varepsilon' + \varepsilon'')(b^2 + 2h^2) = 0 \\ (\varepsilon' + \varepsilon'')(b^2 + h^2) = 0, \\ -(\varepsilon' + \varepsilon'')h^2 = 0, \\ -(\varepsilon' + \varepsilon'')(b^2 + 2h^2) = 0, \\ -(\varepsilon' + \varepsilon'')(2b^2 + h^2) = 0, \end{cases}$$

équations toutes impossibles, ε' et ε'' étant deux nombres essentiellement positifs. On serait arrivé au même résultat si l'on avait supposé $1 + \frac{a}{b} < \frac{b + 2a}{a}$.

Remarque. — Il n'est pas surprenant que toutes les équations (27) renferment le facteur $\varepsilon' + \varepsilon''$; ce fait se produit pour tous les systèmes libres ou assujettis à des conditions n'influant que sur leur position. En effet, dans ce cas, l'équation (13) peut en vertu de celle (c) du § 10, être mise sous l'une des deux formes

$$(28)\qquad (\varepsilon' + \varepsilon'')\,\Sigma \frac{dF}{da_i} a_i = 0,$$

$$(29)\qquad -(\varepsilon' + \varepsilon'')\,\Sigma \frac{dF}{da_j} a_j = 0.$$

§ 13.

L'exemple précédent fait bien ressortir l'inconvénient qu'il y a, au point de vue du bon emploi de la matière, à admettre, pour les systèmes de barres, des figures à lignes surabondantes; voici un autre exemple qui rend ce fait plus saillant encore.

Soit (*fig.* 118, *Pl. XXIV*) un système de cinq barres

(a) FD, AF, FB, BD, DC,

dont les cinq dernières sont égales; ces barres reposent sur trois points fixes et de niveau A, B, C. En raison de la fixité de ces points, les quatre dernières des barres (a) déterminent les sommets F et D, en sorte que la barre FD est surabondante. Je dis qu'il est impossible de faire en sorte que cette barre surabondante travaille à la

même pression que les autres sous l'action de deux charges verticales et égales p appliquées aux sommets F et D. En effet, tout étant symétrique par rapport à la verticale du point B, il suffit d'étudier la déformation élastique de la demi-figure de droite. Si l'on suppose d'abord que les barres BD et CD se compriment toutes deux, comme elles sont égales, leurs raccourcissements seront égaux en vertu des formules (17 *bis*) représentant les raccourcissements dans un système de barres d'égale résistance; donc, dans cette hypothèse, le point D s'abaisserait verticalement et viendrait, après la déformation de la figure, en un point d; de même, le point F viendrait en f sur la verticale du point F, et, à cause de la symétrie, on aurait

$$Ff = Dd, \quad \text{d'où} \quad FD = fd,$$

c'est-à-dire que la longueur de la barre FD n'aurait pas changé : donc cette barre subirait une tension nulle, et toute la matière qui la compose serait perdue.

Si l'on suppose que l'une des deux barres BD et CD, la dernière, par exemple, se raccourcit, tandis que la première s'allonge, alors le point D viendra en d'. A cause de la symétrie, la ligne FD restera horizontale. Soit d le point où elle croise la verticale du point D; menons Dj et di perpendiculaires à Bd'; l'allongement de BD sera jd'; l'allongement de FD sera $2dd'$; et comme

$$BD > \frac{FD}{2},$$

on aura, à cause des formules (17) et (17 *bis*)

$$jd' > dd',$$

d'où résulterait, *a fortiori*,

$$id' > dd',$$

c'est-à-dire qu'un des côtés de l'angle droit du triangle rectangle idd' serait plus grand que l'hypoténuse, ce qui est absurde. On verra de même que, quelque hypothèse qu'on fasse sur les signes des allongements des barres, il est impossible de faire en sorte que la figure se déforme de manière que toutes les barres travaillent de la même manière. Il y a donc ici, comme dans l'exemple précédent, intérêt à supprimer la barre surabondante.

§ 14.

Nous venons de donner des exemples de systèmes à lignes surabondantes qu'il n'est pas possible de constituer en solides d'égale résistance, parce qu'ils ne satisfont pas à toutes les conditions d'égalité ou d'inégalité spécifiées au théorème V. Nous allons donner maintenant quelques exemples de systèmes satisfaisant à ces conditions, et pouvant, par suite, subir l'égale résistance de la part d'un système de forces données, d'une infinité de manières, c'est-à-dire pour une infinité de valeurs différentes données aux sections des barres.

Voici d'abord un procédé général permettant de constituer de tels systèmes : considérons un système de barres ne contenant pas de lignes surabondantes, en équilibre sous l'action de forces données; on pourra toujours (théorème IV), d'une manière et d'une seule, le constituer en système d'égale résistance. Supposons qu'il soit tel, et soient ω_i les sections de ses barres; désignons par (F) et (Φ) les formes géométriques qu'il affecte avant et après sa déformation élastique.

Admettons que la figure (F) soit telle, qu'en y traçant des lignes surabondantes de longueurs a_j, les longueurs des lignes correspondantes, sur la figure (Φ), soient $a_j(1+\varepsilon')$ ou $a_j(1-\varepsilon'')$, l'une ou l'autre de ces expressions pouvant se rapporter à tout ou partie des k lignes surabondantes. Cela revient à supposer qu'on satisfait aux k conditions d'égalité du théorème V, en prenant, parmi les 2^{m-k} figures déformées que l'on peut admettre pour (F), celle (Φ); mais je dis qu'en admettant cette figure (Φ) on satisfait aussi aux conditions d'*inégalité* du théorème V, de sorte que la figure (F), avec les k lignes surabondantes qu'on y a tracées, peut, d'une infinité de manières, être constituée en système d'égale résistance à l'égard des forces données.

Pour le démontrer, il suffit d'établir qu'on peut d'une infinité de manières satisfaire aux $m-k$ équations que la Statique fournit entre les m tensions des barres, en donnant à chaque tension le signe qu'elle doit avoir pour que la figure (F) devienne (Φ), après la déformation élastique. Or on le peut par hypothèse, d'une manière, en supposant aux k barres surabondantes des tensions nulles, et aux $m-k$ autres, des tensions fournies par les équations de la

Statique; donc on le pourra d'une infinité d'autres manières en supposant aux k premières des valeurs positives ou négatives [suivant qu'il s'agit de barres allongées ou raccourcies lors du passage de (F) à (Φ)], suffisamment petites en valeur absolue pour que les signes des $m - k$ dernières ne soient pas modifiés.

§ 15.

Soit un système de barres formé (*fig.* 119, *Pl. XXIV*) des trois triangles isoscèles AFB, FBD, BDC, ce système comportant un point fixe B, et les deux points A et C étant assujettis à se mouvoir sur des lignes horizontales. Ce système contient une ligne surabondante; car, si l'on se donne les trois côtés de chacun des deux triangles BAF et BDC, ces triangles sont déterminés de forme; ils le sont, d'ailleurs, de position par la nécessité, pour chacun d'eux, d'avoir un de ses sommets en B, et l'autre sur l'horizontale AC; donc les points F et D, et, par suite, la longueur FD sont connus.

Supposons qu'aux deux sommets F et D on applique des forces verticales et égales entre elles p; tout sera symétrique par rapport à la verticale du point B. Parmi les figures que l'on peut obtenir en donnant aux six lignes

$$\text{AB, BC, AF, FB, BD, DC}$$

dont on dispose les allongements α_i que comporte la résistance égale, c'est-à-dire les allongements définis par les équations (17) ou (17 *bis*), considérons celle obtenue en donnant à $AB = BC = a$ l'allongement $Cc = Aa = a\varepsilon'$; à $AF = CD = b$ un raccourcissement $b\varepsilon''$, et enfin à $BF = BD = b$ un allongement $b\varepsilon'$. On obtiendra ainsi la figure formée par les six lignes

$$aB,\ Bc,\ af,\ fB,\ Bd,\ dc;$$

et, pour que la figure soit possible en satisfaisant aux conditions d'égalité du théorème V, il faut que l'on ait

$$fd = FD(1 + \varepsilon'), \quad \text{ou} \quad fd = FD(1 - \varepsilon'').$$

Or

$$FD = BC = a,$$

et, comme Bfdc est évidemment un parallélogramme

$$fd = Bc = a(1 + \varepsilon');$$

donc

$$fd = FD(1 + \varepsilon').$$

Maintenant, si l'on supprime la ligne FD, la figure restante n'étant pas à lignes surabondantes peut être constituée en système d'égale résistance, et, si elle est constituée ainsi, elle prendra évidemment la forme B$afdc$B. Donc, en vertu du théorème établi au paragraphe précédent, la figure complète, y compris la ligne surabondante FD, peut, d'une infinité de manières, être constituée en système d'égale résistance à l'égard des deux charges p qu'elle porte, et prendra elle-même, si elle est constituée de la sorte, la forme B$afdc$B.

§ 16.

Prenons comme nouvel exemple le cas déjà étudié au § 5, d'une force R appliquée en un point A où aboutissent des tiges élastiques en nombre quelconque, scellées dans un mur vertical aux points a_0, a_1, a_2, a_3,....

Les points fixes a_0, a_1, a_2,... étant donnés, les longueurs de deux des tiges aboutissant au point A déterminent la position de ce point, et, par suite, les longueurs de toutes les autres tiges; donc, entre les longueurs de ces tiges supposées au nombre de p, il existe $p - 2$ relations; par suite, en vertu du théorème IV, ces tiges ne peuvent, en général, être constituées en solide d'égale résistance que si $p = 2$.

Ainsi : *Si l'on a une charge à faire porter par une potence ou console formée de p tiges scellées dans un mur, on obtient, en général, le meilleur emploi de la matière, en formant la console avec deux tiges seulement*, c'est-à-dire que le système le plus simple possible est aussi, en général, le plus économique, le meilleur au point de vue du bon emploi de la matière.

Si pourtant, pour les convenances de la construction, on voulait constituer une console contenant plus de deux lignes, et qui fût néanmoins susceptible de former un système d'égale résistance, rien ne serait plus simple.

Soit (*fig.* 116, *Pl. XXIV*) une console formée de lignes aboutissant en un point A et scellées dans le mur ZZ' en des points a_1,

a_2, a_3,..., qui sont laissés à la disposition du constructeur.

On prendra deux points a_1, a_2 d'une façon arbitraire. Si les barres Aa_1 et Aa_2 formaient à elles seules la console et qu'on les disposât en solide d'égale résistance, comme, d'après la position de la force R qui les sollicite, la première se raccourcit et la seconde s'allonge, elles deviendraient, après la déformation élastique,

$$b'_1 = b_1(1 - \varepsilon''), \quad b'_2 = b_2(1 + \varepsilon'),$$

b_1 et b_2 étant leurs longueurs primitives.

Connaissant les longueurs b'_1 et b'_2, on en déduit la position A' que prendrait le point A après le déplacement élastique.

Cela posé, si l'on veut déterminer un troisième point de scellement a_3, par la condition que la nouvelle barre Aa_3 n'empêche pas l'égale résistance, il suffira :

1° Si le point a_3 est tellement placé que $A'a_3 > Aa_3$, de le choisir de façon que

$$(a) \qquad A'a_3 = Aa_3(1 + \varepsilon')$$

ou

$$(b) \qquad \frac{A'a_3}{Aa_3} = 1 + \varepsilon';$$

2° Si ce point est tellement placé que $A'a_3 < Aa_3$, de le choisir de façon que

$$A'a_3 = Aa_3(1 - \varepsilon'').$$

Le rapport des distances du point cherché a_3 aux deux points connus A et A' doit ainsi être égal à une quantité donnée. Sa détermination est donc des plus faciles; il existera, en général, sur la ligne ZZ' deux points satisfaisant à la condition (a) et deux points satisfaisant à la condition (b). On pourra donc construire une console à trois, quatre, cinq ou six barres satisfaisant aux conditions d'égale résistance.

§ 17.

De toute la théorie et des exemples qui précèdent il résulte que les systèmes ne contenant pas de lignes surabondantes sont, en général, les seuls qui puissent être constitués en solides d'égale résistance. On en déduit cette conséquence nouvelle et importante, que

les meilleures constructions sont, en général, les plus simples, celles qui renferment le moins de pièces possible. Cependant le théorème V et les exemples des § 15 et 16 indiquent que, dans certains cas déterminés par la théorie, des systèmes à k lignes surabondantes peuvent aussi devenir d'égale résistance, et alors ils le peuvent d'une k^{uple} infinité de manières, c'est-à-dire qu'on peut alors, sans cesser d'avoir l'égale résistance de toutes les barres, disposer, dans de certaines limites, des sections de k d'entre elles. On comprend que cette faculté puisse être précieuse pour le constructeur; et comme, en définitive, dans l'établissement des grandes charpentes, les longueurs de toutes les barres ne sont jamais commandées d'avance, qu'une fois arrêtée la forme générale de la figure géométrique que l'on veut adopter pour une charpente, les longueurs de ses divers côtés sont, en grande partie, arbitraires, on comprend qu'on puisse très-souvent disposer de ces longueurs, de façon à satisfaire aux k conditions (13) nécessaires pour qu'en adoptant une figure à k lignes surabondantes elle se trouve précisément dans le cas de pouvoir être d'une infinité de manières érigée en système d'égale résistance.

On doit dès lors se demander si, au point de vue économique, il y a lieu de préférer de telles figures, quand elles sont possibles, à celles qui ne contiennent pas de lignes surabondantes. Nous allons voir que cette question se résout par la négative, et qu'ainsi l'on arrive à cette conclusion que jamais, même dans les cas exceptionnels spécifiés par le théorème V, il n'y a économie à adopter des constructions formées par des figures géométriques à lignes surabondantes.

Lemme. — *Si une figure à k lignes surabondantes est tellement constituée qu'on puisse, d'une manière et par suite d'une infinité de manières, disposer des sections de ses barres de façon qu'elle forme système d'égale résistance relativement à des forces extérieures données, on peut toujours, en supprimant une partie de ses barres, former un système* sans lignes surabondantes *qui, soumis aux mêmes forces, subisse les mêmes déformations élastiques que le système primitif.*

Soit une figure formée de m barres et contenant k lignes surabondantes. Nous admettons qu'il est possible d'une et, par suite,

d'une infinité de manières, de donner à ces barres des sections telles que les barres tendues supportent toutes même tension et les barres pressées toutes même pression par unité de surface et par unité du coefficient d'élasticité de la matière. Soit ω_i un système de sections calculées de façon qu'il en soit ainsi. Soient (F) et (Φ) les figures géométriques que forment alors les axes des barres avant et après la déformation élastique.

Il s'agit de montrer qu'on peut toujours supprimer k ou un nombre plus grand de barres, sans que la figure cesse de prendre, après la déformation, la forme (Φ).

Soient t_i les tensions des barres de section ω_i. Nous pouvons d'une infinité de manières faire varier ces sections ω_i et les tensions correspondantes t_i sans que le système cesse d'être d'égale résistance et sans que la figure déformée cesse d'affecter la forme (Φ): il suffit pour cela (§ 8) que les variations soient telles qu'elles ne modifient le signe d'aucune tension; comme on dispose de k sections sous la seule réserve de ne les faire varier que de manière à ne pas changer les signes des tensions, conservons leurs valeurs à $k-1$ de ces sections et par suite aux tensions correspondantes, et ne faisons varier que la $k^{ième}$ section que nous appellerons ω_k; la tension correspondante prendra des valeurs t_k fournies par la condition de la résistance égale; et les $m-k$ autres tensions fournies par les $m-k$ équations de la Statique varieront en fonction de la seule quantité t_k ou de celle ω_k, en sorte que les tensions t_i de toutes les barres sont déterminées pour chaque valeur attribuée à ω_k. Faisons $\omega_k = 0$, et soient t'_i les valeurs correspondantes des tensions t_i; si toutes les tensions t'_i ont mêmes signes que les tensions correspondantes t_i, il s'ensuit que, pour $\omega_k = 0$, le système de barres continuera de prendre, après la déformation, la forme (Φ); et comme l'une de ses barres a une section nulle, on peut dire que, dans ce cas, il existe un système d'égale résistance composé de $m-1$ barres seulement, et affectant, après la déformation, la même forme (Φ) que le système donné.

Supposons maintenant qu'une ou plusieurs des tensions t'_i n'aient pas les mêmes signes que les tensions correspondantes t_i; alors, en faisant décroître ω_k progressivement, il arrivera nécessairement que pour une valeur $\omega_k = \omega'_k$, comprise entre ω_k et zéro, l'une au moins des tensions t_i s'annule, toutes les autres conservant leurs

signes. Donc, pour cette valeur $\omega_i = \omega'_k$, le système affectera toujours, après la déformation, la forme (Φ); et comme, à cause de la résistance égale, la section de la barre dont la tension s'annule est elle-même nulle, on aura encore un système formé de $m - 1$ barres seulement et prenant, après la déformation, la forme (Φ). Ainsi, étant donné un système d'égale résistance formé de m barres et contenant des lignes surabondantes, on peut toujours constituer un autre système d'égale résistance, formé de $m - 1$ barres seulement et affectant, après la déformation élastique, la même forme géométrique que le proposé.

Si ce nouveau système contient encore des lignes surabondantes, on pourra réduire encore d'au moins une unité le nombre de ses barres, sans modifier les déplacements élastiques de ses divers sommets, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une figure ne contenant plus de lignes surabondantes.

§ 18.

Cela posé, soit T la somme des travaux de toutes les forces extérieures appliquées aux différents sommets de la figure, dus aux déplacements élastiques de ces sommets. Comme ces déplacements sont compatibles avec les liaisons du système, il n'entrera dans l'expression de T aucune force de liaison. Si maintenant on remplace le système à barres surabondantes que forme la figure (F) par le système sans barres surabondantes que nous appellerons (F_1) et qui donne lieu aux mêmes déplacements élastiques des sommets, le travail T des forces extérieures dû à la déformation élastique sera le même, que ces forces soient appliquées à la figure (F) ou à la figure (F_1).

Soient maintenant, dans un système quelconque, t_i la tension positive d'une barre et α_i son déplacement élastique; le travail des forces extérieures développé dans cette barre par suite des déplacements élastiques qui produisent l'allongement α_i est, d'après un théorème connu et facile à démontrer,

$$\tfrac{1}{2}\, t_i \alpha_i ;$$

d'ailleurs, si le système est d'égale résistance,

$$t_i = e_i \omega_i \varepsilon',$$

d'où

$$\alpha_i = a_i \frac{t_i}{e_i \omega_i} = a_i \varepsilon'$$

et

$$\frac{1}{2} t_i \alpha_i = \frac{\varepsilon'^2}{2} e_i a_i \omega_i ;$$

par suite, la somme des travaux des forces élastiques de toutes les barres qui s'allongent est

$$\frac{1}{2} \Sigma t_i \alpha_i = \frac{\varepsilon'^2}{2} \Sigma a_i e_i \omega_i.$$

La tension d'une barre a_j qui se raccourcit est

$$t_j = - a_j \omega_j \varepsilon'',$$

son allongement

$$\alpha_j = - a_j \varepsilon'' ;$$

d'où, pour le travail de la compression,

$$\frac{1}{2} t_j \alpha_j = \frac{\varepsilon''^2}{2} e_j a_j \omega_j$$

et, pour la somme des travaux de toutes les compressions,

$$\frac{\varepsilon''^2}{2} \Sigma a_j e_j \omega_j.$$

La somme des travaux de toutes les forces élastiques du système, pressions et tensions, est donc

$$\frac{\varepsilon'^2}{2} \Sigma a_i e_i \omega_i + \frac{\varepsilon''^2}{2} \Sigma a_j e_j \omega_j.$$

Cette somme étant nécessairement égale au travail des forces extérieures,

$$\frac{\varepsilon'^2}{2} \Sigma a_i e_i \omega_i + \frac{\varepsilon''^2}{2} \Sigma a_j e_j \omega_j = \mathrm{T}.$$

Si l'on admet, comme on le fait d'habitude, que la matière résiste également à l'extension et à la compression, c'est-à-dire si l'on suppose $\varepsilon' = \varepsilon''$, cette équation devient, en appelant Σ une somme s'étendant à toutes les barres, aussi bien à celles tendues qu'à celles pressées,

$$(30) \qquad \frac{\varepsilon'^2}{2} \Sigma a_i e_i \omega_i = \mathrm{T}.$$

Dans le cas particulier où toutes les barres sont composées de la même matière ou de matières ayant même coefficient d'élasticité e, cette équation devient

$$\Sigma a_i \omega_i = \frac{2T}{e\varepsilon^2}. \tag{31}$$

Le produit $a_i \omega_i$ est le volume de la barre de longueur a_i; le premier membre représente donc le volume total de matière employée, et, comme le second membre est le même pour le système (F) que pour le système (F_1), on conclut :

Théorème V. — *Lorsqu'un système, contenant k lignes surabondantes et composé de barres formées toutes de la même matière, est tel qu'il puisse, d'une manière et, par suite, d'une infinité de manières, être édifié en système d'égale résistance relativement à des forces extérieures données, il existe toujours un système, sans lignes surabondantes, susceptible de résister aux mêmes forces avec la même dépense de matière.*

Ainsi, comme nous l'avons annoncé, même dans le cas particulier où l'on peut, sans cesser d'avoir l'égale résistance, employer des figures à lignes surabondantes, il n'y a pas, au point de vue économique, intérêt à le faire.

Si les barres sont composées de matières différentes, alors on voit par l'équation (30) que le dernier théorème doit être remplacé par celui-ci :

Théorème VI. — *Lorsqu'un système contenant k lignes surabondantes est tel qu'il puisse, d'une manière et, par suite, d'une infinité de manières, être édifié en système d'égale résistance, relativement à des forces données agissant sur lui, il existe toujours un système, sans lignes surabondantes, susceptible de résister aux mêmes forces et tel, que la somme des produits des volumes des barres par leurs coëfficients d'élasticité respectifs est la même dans ce système et dans le système donné.*

Et comme la somme des produits dont il s'agit ici représente en quelque sorte le *poids élastique* des matières employées, on voit qu'ici, comme dans le cas précédent, il n'y a pas intérêt, même quand on le peut, à faire usage de figures à lignes surabondantes.

Digitized by Google

IV.

Comparaison entre les principales poutres employées en Europe et aux États-Unis, au point de vue du volume de matière à dépenser pour résister à des charges uniformes ou roulantes.

§ 19.

De toute la théorie qui précède, il résulte que les systèmes de charpentes les meilleurs, les plus économiques, sont ceux dont les figures géométriques ne contiennent pas de lignes surabondantes; par exemple, la poutre simplement triangulée (*fig.* 120, *Pl. XXIV*) est plus avantageuse que celle à croix de Saint-André (*fig.* 121); celle-ci plus avantageuse que la poutre à treillis, si usitée chez nous et à peu près disparue aux États-Unis, où elle avait pourtant pris naissance; et ainsi de suite.

Il résulte de là que si l'on veut chercher, parmi toutes les grandes poutres posées sur deux appuis, celle qui, pour résister à des charges données, exigera le moindre volume de matière, il suffira de faire cette recherche parmi les poutres ne contenant pas de lignes surabondantes. Nous pouvons, par exemple, écarter *a priori* la poutre à croix de Saint-André et celle à treillis; nous sommes bien certain d'avance, et sans faire aucun calcul, que la poutre triangulée l'emportera sur elles dans le parallèle que nous nous proposons de faire.

Il importe pourtant de bien nous expliquer à ce sujet : il ne faudrait pas croire qu'étant donnés au hasard deux systèmes de barres, l'un contenant, l'autre ne contenant pas de lignes surabondantes, on puisse affirmer qu'à résistance égale le premier exigera nécessairement, et par cela seul qu'il contient des lignes surabondantes, plus de matière que le second; le contraire peut se produire si les figures géométriques formées par les deux systèmes sont différemment constituées, et le dernier peut alors se trouver établi de façon si défectueuse que, tout en ne contenant pas de lignes surabondantes, il absorbe plus de matière que le premier. Mais ce qui

ressort de l'ensemble de la théorie qui précède, et notamment du théorème V, c'est qu'étant donné un système de barres à lignes surabondantes on peut toujours, en lui enlevant un nombre suffisant de barres, former un système, sans lignes surabondantes, plus économique ou *au moins* aussi économique que lui ; et cela suffit pour que, dans la recherche des systèmes les plus économiques, il nous soit permis d'écarter les systèmes à lignes surabondantes. Ainsi, quand nous écartons la poutre à croix de Saint-André, nous n'entendons pas pour cela dire qu'elle soit plus dispendieuse que *l'un quelconque* des systèmes sans lignes surabondantes que nous étudierons, mais seulement que l'un d'entre eux, à savoir celui que l'on obtient en débarrassant les croix de Saint-André de leurs lignes surabondantes, et, comme le système ainsi obtenu ne peut être que la poutre triangulée, il suffit que nous comprenions cette dernière dans le parallèle que nous allons faire.

De même, si l'on désignait quelque autre système que ce fût à lignes surabondantes, on pourrait indiquer un système sans lignes surabondantes susceptible de le remplacer avec économie, ou tout au moins sans augmentation dans la dépense de matière, pouvant, dès lors, le remplacer dans la comparaison que nous voulons faire.

Cette conséquence entièrement rigoureuse de la théorie est, du reste, parfaitement d'accord avec le sentiment de la pratique. En Amérique, les ingénieurs, au moins les plus estimés, n'emploient, depuis quelques années, que des poutres calculables par les seules règles de la Statique ; il se trouve ainsi qu'en cherchant la simplicité dans le calcul et dans l'exécution ils ont obtenu des systèmes d'égale résistance ; mais, comme ils paraissent avoir été guidés moins par des raisons scientifiques que par le sentiment et le désir de faire des calculs sûrs et simples, ils sont bien loin d'avoir trouvé les meilleurs systèmes d'égale résistance ; plusieurs d'entre eux ont même conservé, dans leurs innovations, des systèmes à lignes surabondantes, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, non susceptibles d'être rendus d'égale résistance et non susceptibles d'être calculés par la Statique, et ils les calculent par des méthodes semi-empiriques souvent défectueuses : tels sont les systèmes Jones, Murphy-Whipple, Linville et Post. Nous les écartons, par les raisons indiquées plus haut, comme étant à lignes surabondantes, comme pouvant, par conséquent, être remplacés par des

systèmes à triangles que nous savons d'avance être plus économiques ou au moins aussi économiques. Il est remarquable, du reste, et ceci est encore une concordance entre la théorie et le sentiment de la pratique, que ces systèmes sont beaucoup moins employés que le système Fink qui est sans lignes surabondantes. Ainsi M. Malézieux rapporte qu'il donne la description du système Murphy-Whipple d'après un Traité de construction des ponts de M. Merrill; mais que, dans son voyage d'exploration, il n'a trouvé aucun ouvrage construit dans ce système.

Nous mettrons en parallèle les systèmes Fink, Bollman et les diverses variétés des systèmes à triangles, c'est-à-dire, parmi les systèmes usités en Europe et aux États-Unis, tous ceux qui ne contiennent pas de lignes surabondantes; nous chercherons, pour chacun d'eux, le volume de matière nécessaire pour résister à une charge permanente et à une charge roulante. Nous chercherons ensuite quel est celui qui, dans les divers cas que présente la pratique, donne lieu à la plus grande économie de matière, et nous serons certain ainsi, sans avoir besoin de nous occuper des systèmes à lignes surabondantes, d'avoir trouvé, parmi tous les systèmes usités, *qu'ils soient ou non à lignes surabondantes,* quel est celui qui, dans chaque cas, est le plus avantageux à employer.

§ 20.

Autrefois on remplaçait, dans les épreuves des ponts, les charges roulantes par des poids morts supposés, comme la charge permanente, uniformément répartis sur la longueur du tablier; mais, à la suite d'un accident survenu dans ces dernières années, une circulaire de M. le Ministre des Travaux publics, en date du 15 juin 1869, a prescrit, pour tous les ponts établis sur des routes nationales ou départementales, de faire les épreuves non-seulement au moyen de poids morts, mais aussi avec des charges roulantes, en y faisant circuler au pas et stationner, pendant une demi-heure, sur le nombre de files que comporte la largeur de la voie charretière, soit des chariots à deux roues attelés de cinq chevaux et pesant 11 tonnes, équipages compris, soit des voitures à quatre roues attelées de huit chevaux et d'un poids total de 16 tonnes, suivant que

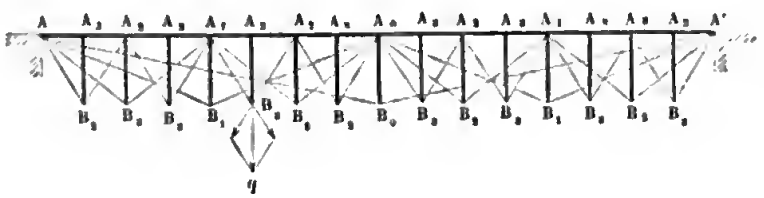
l'un ou l'autre de ces genres de véhicules produit les effets les plus défavorables au point de vue de la résistance. Ces chiffres de 11 et 16 tonnes sont d'ailleurs justifiés, parce que ce sont les limites des chargements autorisés par le règlement du 10 août 1852 sur la police du roulage.

Il ne suffit pas, d'après cela, de disposer les diverses barres d'une poutre de façon qu'elles puissent résister à *une charge déterminée;* il faut concevoir un véhicule dans les diverses positions qu'il occupe lors du parcours d'un pont, lui adjoindre la charge permanente et faire les calculs de façon que, *quelle que soit la position du véhicule,* aucune barre ne subisse des tensions ou des pressions plus fortes que celles que comporte la matière employée. Il faut donc, pour chaque position du véhicule, chercher quelles sont les barres qui sont le plus fatiguées, et leur donner les sections nécessaires pour résister à cette fatigue. C'est ainsi que nous procéderons dans ce qui va suivre.

§ 21.

SYSTÈME FINK. — **Description.** — Une semelle unique AA'; en son milieu A_0, un montant vertical ou poinçon $A_0 B_0$ dont on relie l'extrémité B_0 aux deux extrémités de la poutre par deux tirants.

Fig. A.



On opère sur chaque moitié de la semelle comme sur la semelle entière, c'est-à-dire qu'au milieu A_1 de chaque moitié on place un montant $A_1 B_1$ dont l'extrémité inférieure B_1 est reliée aux deux extrémités de cette moitié de semelle. On opère de même sur chacun des quatre quarts de la semelle, et ainsi de suite.

Supposons généralement qu'on divise ainsi la semelle en 2^n parties égales; nous appellerons :

A_0 le milieu de la semelle;
A_1 les 2^1 ou 2 points milieux de chaque $\frac{1}{2}$ semelle;

A_2 les 2^2 ou 4 points milieux de chaque $\frac{1}{4}$ de semelle;
A_3 les 2^3 ou 8 points milieux de chaque $\frac{1}{8}$ de semelle,
et généralement :
A_i les 2^i points milieux de chaque $\frac{1}{2^i}$ fraction de la semelle,

de telle sorte que, si la semelle est divisée en 2^n parties égales, les points de division ayant l'indice le plus élevé auront l'indice $n-1$, et seront au nombre de 2^{n-1}. En effet, si l'on divise la poutre en 2^n parties, le nombre des points de division est 2^n-1. On vérifie bien qu'il en est ainsi, car on a

$2^0 = 1$ point de division A_0,
$2^1 = 2$ points de division A_1,
$2^2 = 4$ points de division A_2,
.....,
.....,
2^{n-i} points de division A_{n-i},
.....,
2^{n-1} points de division A_{n-1},

Total..... $1 + 2 + 2^2 + \ldots 2^{n-1} = 2^n - 1$ points de division.

Nous appellerons B_i les extrémités inférieures des montants issus des points A_i.

Soient maintenant n' le nombre total des sommets, y compris les deux extrémités de la semelle, et m' le nombre total des côtés de la figure; on aura

$$n' = 2(2^n - 1) + 2 = 2^{n+1}$$

et, en observant que de chaque point B_i partent trois lignes et que la semelle comprend 2^n parties pouvant subir des tensions distinctes,

$$m' = 3(2^n - 1) + 2^n = 2 \times 2^{n+1} - 3$$

ou

$$m' = 2n' - 3,$$

relation qui indique (§ 3) que, quel que soit le nombre 2^n des divisions, les tensions des barres sont calculables par la Statique.

§ 22.

Charge permanente. — Cherchons d'abord ces tensions dans l'hypothèse où la poutre porte une charge uniformément répartie à raison de p kilogrammes par mètre courant, de sorte que, si L est sa longueur et P la charge totale qu'elle porte, on a

$$(a) \qquad P = pL.$$

Nous admettons que cette charge porte par fractions égales sur chacun des sommets A_i, en sorte que chaque sommet porte une charge

$$(b) \qquad q = \frac{P}{2^n},$$

et les deux extrémités de la poutre portent chacune la moitié de cette quantité. Il en résulte que la réaction de chacun des appuis sera

$$(c) \qquad R = \frac{P}{2} - \frac{P}{2 \times 2^n} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

La distance entre deux points consécutifs A_i est d'ailleurs

$$(d) \qquad a = \frac{L}{2^n}.$$

Cela posé, pour trouver les tensions des barres, nous observerons que de chaque point B_i ne partent que trois barres; donc, si l'on connaissait les tensions de l'une d'elles, par exemple celle du montant, par une simple décomposition de forces, on aurait celles des deux tirants.

On a donc de suite la tension de tous les montants $A_{n-1}B_{n-1}$ issus des points A_{n-1} (sur la figure ci-dessus, A_3); car de chacun de ces points ne part qu'une seule pièce qui est le montant vertical : donc ce montant supporte une compression égale à toute la charge q exercée au point A_{n-1}, et par suite les deux tirants partant des

points B_{n-1} supportent chacun une tension égale à

$$\frac{q\sqrt{h^2+a^2}}{2h},$$

comme on le voit par le losange des forces.

Maintenant que l'on connaît les tensions des tirants allant des points B_{n-1} aux points A_{n-2} (sur la figure de B_3 à A_2), on voit qu'en chaque point A_{n-2} les tensions des deux tirants qui y aboutissent se recomposent entre elles pour donner une force verticale q, laquelle, ajoutée à la charge q agissant sur chaque sommet A_{n-2}, donnera $2q$ pour la compression totale exercée sur chaque montant $A_{n-2}B_{n-2}$. Par suite les tirants issus de B_{n-2} supportent chacun une tension

$$\frac{2q\sqrt{h^2+2^2a^2}}{2h}.$$

Les tensions de ces tirants qui partent de B_{n-2} pour aboutir à A_{n-3} (sur la figure de B_2 à A_1) se composent entre elles et donnent une résultante verticale $2q$; les tirants issus de B_{n-1} et aboutissant à A_{n-3} (sur la figure de B_3 à A_1) donnent eux-mêmes, comme nous venons de le voir, une résultante verticale q, soit en tout $3q$ et en y ajoutant la charge q exercée en A_{n-3} on trouvera $4q$ pour la compression des montants issus de ces points.

En continuant ainsi, on trouvera facilement la loi des tensions. Nous la résumons dans le tableau suivant, où nous donnons aussi le volume de matière que doit contenir chaque barre pour que sa tension ou sa compression par unité de surface (nous supposons que la matière résiste également bien à l'extension et à la compression) soit un nombre donné R.

DÉSIGNATION DES PIÈCES. (1).	TENSION DE CHAQUE PIÈCE [*]. (2).	VOLUME DE CHAQUE PIÈCE. (3).	NOMBRE des pièces similaires comme tension et comme volume. (4).	VOLUME TOTAL par ensemble de pièces similaires. (5).	OBSERVATIONS. (6).
Montants $A_{n-1} B_{n-1}$	$-q$	$\frac{qh}{R}$	2^{n-1}	$2^{n-1} \times \frac{qh}{R}$	(*) Les compressions sont précédées du signe —.
Tirants issus de B_{n-1}.....	$\frac{q\sqrt{h^2+a^2}}{2h}$	$\frac{q(a^2+a^2)}{2hR}$	2^n	$2^{n-1} \times \frac{q(h^2+a^2)}{hR}$	
Montants $A_{n-2} B_{n-2}$.....	$-2q$	$\frac{2qh}{R}$	2^{n-2}	$2^{n-1} \times \frac{qh}{R}$	
Tirants issus de B_{n-2}.....	$2q\frac{\sqrt{h^2+2^2a^2}}{2h}$	$2q\frac{h^2+2^2a^2}{2hR}$	2^{n-1}	$2^{n-1} \times q\frac{(h^2+2^2a^2)}{hR}$	
Montants $A_{n-3} B_{n-3}$	-2^2q	$2^2\frac{qh}{R}$	2^{n-3}	$2^{n-1} \times \frac{qh}{R}$	
Tirants issus de B_{n-3}.....	$\frac{2^2q\sqrt{h^2+2^4a^2}}{2h}$	$\frac{2^2q(h^2+2^4a^2)}{2hR}$	2^{n-2}	$2^{n-1} \times q\frac{(h^2+2^4a^2)}{hR}$	
.....	.....	.....	...	.....	
.....	.....	.....	...	.....	
Montants $A_{n-i} B_{n-i}$.....	$-2^{i-1}q$	$2^{i-1}\frac{qh}{R}$	2^{n-i}	$2^{n-1} \times \frac{qh}{R}$	
Tirants issus de B_{n-i}.....	$\frac{2^{i-1}q\sqrt{h^2+2^{2i-2}a^2}}{2h}$	$\frac{2^{i-1}q(a^2+2^{2i-2}a^2)}{2hR}$	2^{n-i+1}	$2^{n-1} \times q\frac{(h^2+2^{2i-2}a^2)}{hR}$	
.....	.....	.....	.....	.....	
.....	.....	.....	.....	.....	
Poinçon $A_n B_0$.....	$-2^{n-1}q$	$2^{n-1}\frac{qh}{R}$	$2^0 = 1$	$2^{n-1} \times \frac{qh}{R}$	
Tirants issus de B_0.....	$\frac{2^{n-1}q\sqrt{h^2+2^{2n-2}a^2}}{2h}$	$\frac{2^{n-1}q(h^2+2^{2n-2}a^2)}{2hR}$	2	$2^{n-1} \times \frac{q(h^2+2^{2n-2}a^2)}{hR}$	

Si on fait la somme des volumes de la colonne (5) on trouve :

1° Pour le volume total v_1 des poinçons

$$v_1 = n \times 2^{n-1} \times \frac{qh}{R} = \frac{Pnh}{2R};$$

2° Pour le volume total des tirants

$$v_2 = n \times 2^{n-1} \times \frac{qh}{R} \times \frac{2^{n-1} q a^2}{hR}[1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2n-2}],$$

ou, comme la parenthèse est une progression géométrique dont la raison est 2^2 ou 4,

$$v_2 = n \times 2^{n-1} \times \frac{qh}{R} + 2^{n-1} \frac{qa^2}{hR} \times \frac{2^{2n} - 1}{3}$$

ou

$$v_2 = \frac{P}{R}\left(\frac{hn}{2} + \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{6} \times \frac{L^2}{h}\right).$$

Il nous reste à trouver le volume de la semelle. Or on remarquera que les tensions des barres aboutissant à l'un quelconque des points A_{n-i} donnent une résultante verticale; donc elles ne produisent aucun changement dans la tension de la semelle; cette tension est donc constante dans toute la longueur de la pièce, et elle est égale à la somme des composantes horizontales des tensions de tous les tirants issus de l'une de ses extrémités, de celle de A_1 par exemple. De ce point partent n tirants aboutissant à n points

$$B_0,\ B_1,\ B_2, \ldots,\ B_{n-1}$$

Or, par la colonne (2) du tableau précédent, on voit que la tension de chaque tirant issu de B_{n-i} est

$$\frac{2^{i-1} q \sqrt{h^2 + 2^{2i-2} a^2}}{2h};$$

le cosinus de l'angle que ce tirant fait avec la semelle est

$$\frac{2^{i-1} a}{\sqrt{h^2 + 2^{2i-2} a^2}}.$$

Donc la composante horizontale de cette tension est

$$2^{2i-2} \times \frac{qa}{2h},$$

et la somme de ces composantes, c'est-à-dire la tension de la semelle,

$$\frac{qa}{2h}(1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2n-2}) = \frac{qa}{2h} \times \frac{2^{2n} - 1}{3};$$

le volume de la semelle sera donc

$$v_3 = \frac{qaL}{2hR} \times \frac{2^{2n} - 1}{3},$$

ou

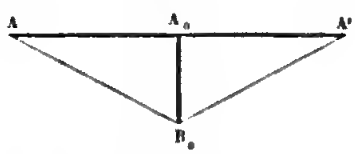
$$v_3 = \frac{P}{R} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{6} \times \frac{L^2}{h},$$

d'où, pour le volume total V_p résultant de la charge permanente P,

$$(32) \qquad V_p = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{P}{R}\left(nh + \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3} \times \frac{L^2}{h}\right).$$

On voit que le volume augmente à mesure que n augmente : donc la poutre la plus économique serait celle pour laquelle $n = 1$, c'est-à-dire un simple triangle (*fig.* B), avec un poinçon au milieu ;

Fig. B.



mais c'est parce qu'il est impossible pour les grandes portées d'avoir une longue semelle AA', comprimée sans être soutenue contre la flexion, qu'on a imaginé des armatures plus complexes. On doit donc regarder n comme une quantité donnée, ou à peu près, par les nécessités de la pratique. Si alors la hauteur h de la poutre n'est pas fixée, on peut la prendre de façon que le volume ci-dessus de-

vienne minimum : c'est ce qui a lieu pour

$$n - \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3} \times \frac{L^2}{h^2} = 0$$

ou

$$(33) \qquad \frac{h}{L} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2^{n^2}}}{3n}}.$$

Nous ne nous arrêterons pas, quant à présent, à la discussion de cette formule et d'autres que l'on pourrait tirer de l'expression (32). Nous trouverons des équations analogues pour les autres poutres que nous étudierons, et nous discuterons toutes ces équations d'ensemble.

§ 23.

Charge roulante. — Cherchons maintenant le volume de matière nécessaire pour résister à une charge roulante Q, *dans quelque position qu'elle occupe*, lorsqu'elle franchit la poutre, ainsi que les tensions maxima qu'une telle charge développe dans les diverses barres.

Comme d'un quelconque des points A_{n-1} ne part qu'un montant vertical, si un tel point porte une charge Q, il la transmet intégralement au montant, et elle se décompose ensuite suivant les deux tirants issus de l'extrémité de ce montant. Aux autres points A_{n-1}, les tensions des montants sont nulles, et, par suite, il en est de même des tensions aux points correspondants B_{n-1}. Des deux tirants qui aboutissent en l'un des deux points A_{n-2} les plus voisins du point chargé A_{n-1}, l'un ne porte rien comme émanant d'un point B_{n-1}, et, par suite, la tension de l'autre se décompose en une force verticale suivant le montant, et en une force horizontale suivant la semelle. La première, comme il est aisé de le voir, est $\frac{Q}{2}$; donc les pièces issues du point que nous considérons sont moins fatiguées que celles issues du point portant actuellement la charge roulante, et à mesure qu'on s'éloigne de ce dernier point l'influence de la charge se fera de moins en moins sentir, comme on devait s'y attendre.

Digitized by Google

Supposons maintenant la charge Q appliquée généralement à un des 2^i points A_{n-i}. On voit facilement, si l'on cherche les tensions des diverses barres, en commençant, comme nous l'avons fait plus haut, par celles issues des points A_{n-1} et B_{n-1}, puis passant à celles issues de A_{n-2} et B_{n-2}, et ainsi de suite, que les tensions de toutes les barres issues des points

$$A_{n-1},\ A_{n-2},\ A_{n-3}, \ldots,\ A_{n-i+1},$$
$$B_{n-1},\ B_{n-2},\ B_{n-3}, \ldots,\ B_{n-i+1}$$

sont nulles. Cela fait comprendre de suite que c'est, en somme, un assez mauvais système de charpente que celui-ci, puisque les pièces qui le composent sont si peu solidarisées, qu'à chaque instant, lors du passage d'une charge roulante, une fraction importante des pièces reste absolument inactive; d'où résulte nécessairement que les autres pièces sont surchargées; et, comme la charge se porte successivement sur toutes les parties de la poutre, chaque barre va se trouver ainsi, tantôt travaillant avec excès, tantôt inactive.

Des pièces qui aboutissent au sommet chargé lui-même et qui, elles du moins, devraient toutes concourir à supporter la charge, celles qui aboutissent à des points ayant un indice supérieur à $n - i$ ne travaillent pas : donc toute la charge est reportée, par le montant vertical $A_{n-i}B_{n-i}$, sur les deux tirants issus du point B_{n-i} et de ceux-ci sur la semelle. Ainsi, lors du passage d'une charge roulante, il n'y a à chaque instant, au point même occupé par la charge, que quatre pièces qui travaillent :

1° Le montant vertical supporte la charge Q;

2° Les deux tirants B_{n-1} supportent chacun

$$\frac{Q\sqrt{h^2 + 2^{2i-2}a^2}}{2h},$$

et la semelle une pression

$$2^{i-1} \times \frac{Qa}{2h}.$$

Il résulte de là que le volume v'_1 des montants verticaux au nombre de $2^n - 1$ doit être

$$v'_1 = \frac{(2^n - 1)Qh}{R},$$

le volume des deux tirants issus de B_{n-i}

$$\frac{Q(h^2 + 2^{2i-2}a^2)}{hR},$$

et le volume total des paires de tirants au nombre de $2^n - 1$

$$v'_2 = \frac{(2^n - 1)Qh}{R} + \frac{Qa^2}{hR}[1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2n-2}]$$

ou

$$v'_2 = \frac{(2^n - 1)Qh}{R} + \frac{Qa^2}{4R} \times \frac{2^{2n} - 1}{3} = \frac{Q}{R}\left[(2^n - 1)h + \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3} \times \frac{L^2}{h}\right].$$

Il nous reste à calculer le volume de la semelle. Il est clair qu'elle supportera la plus grande tension au moment où la charge passera au milieu de la pièce.

La tension sera alors

$$-\frac{QL}{4h},$$

son volume

$$v'_3 = \frac{QL^2}{4hR};$$

par suite, le volume total de matière V_q nécessaire pour porter une charge roulante, *dans quelque position qu'elle puisse occuper sur la poutre,* sera

$$(34) \qquad V_q = v'_1 + v'_2 + v'_3 = \frac{Q}{R}\left[2(2^n - 1)h + \frac{7 - \frac{1}{2^{2n-2}}}{12} \times \frac{L^2}{h}\right].$$

§ 24.

Si l'on suppose la charge appliquée aux points $B_0, B_1, B_2, \ldots$, au lieu de l'être sur la semelle, alors les poinçons $A_i B_i$ ne servent plus qu'à empêcher la flexion de la semelle; théoriquement, leur section est nulle.

Dans cette hypothèse, il faut des volumes V_p et V_q retrancher

les volumes v_1, v'_1 trouvés pour ces poinçons. Il en résulte :

$$(34\ bis)\quad \begin{cases} V_p = \dfrac{P}{R}\left[\dfrac{nh}{2} + \dfrac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{3} \times \dfrac{L^2}{h}\right], \\ V_q = \dfrac{Q}{R}\left[(2^n-1)h + \dfrac{7-\frac{1}{2^{2n}}}{12} \times \dfrac{L^2}{h}\right]. \end{cases}$$

Dès que n est supérieur à 3, le volume de matière nécessaire pour porter une charge *permanente* est fourni sensiblement par la formule très-simple et très-remarquable :

$$(35)\qquad V_p = \frac{PL^2}{3hR}.$$

§ 25.

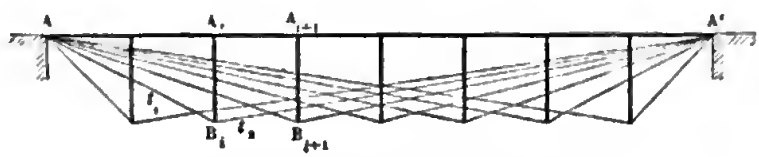
Pour avoir le volume V de matière nécessaire pour porter simultanément une charge permanente et une surcharge, celle-ci dans toutes les positions qu'elle peut occuper, il suffit d'ajouter les volumes V_p et V_q, afférents à chacune de ces charges, c'est-à-dire que

$$(36)\qquad V = V_p + V_q.$$

§ 26.

SYSTÈME BOLLMAN. — Description. — Une semelle unique AA′, divisée en m parties égales (*fig.* C); aux points de division, des

Fig. C.



poinçons de hauteur constante A_iB_i ; l'extrémité de chaque poinçon reliée aux deux extrémités de la semelle par deux tirants.

§ 27.

Charge permanente. — Cherchons d'abord le volume de matière nécessaire pour porter la charge permanente.

Nous appelons toujours L la longueur de la semelle, p la charge permanente par mètre, en sorte que la charge permanente totale est

$$P = pL.$$

Sur chaque poinçon $A_i B_i$ repose une charge

$$q = \frac{P}{m}$$

et, aux deux points extrêmes A et A', une charge égale à $\frac{q}{2}$.

Il en résulte que la réaction de chaque appui est

$$R = \frac{P}{2} - \frac{PL}{2m} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{L}{m}\right).$$

La distance entre deux points de division consécutifs A_i et A_{i+1} est

$$a = \frac{L}{m}.$$

Considérons le poinçon $A_i B_i$ occupant le $i^{ième}$ rang à partir de la gauche. La charge q se reporte évidemment tout entière sur ce poinçon, qui subit une compression q et a pour volume

$$\frac{qh}{R}.$$

Le volume total des poinçons, au nombre de $m - 1$, est donc

$$v_1 = (m-1)\frac{qh}{R} = \frac{m-1}{m} \times \frac{Ph}{R}.$$

Les tensions t_1 et t_2 des tirants issus de B_i s'obtiennent en décom-

posant la force q suivant la direction de ces tirants, ce qui donne, en observant que $AA_i = ia$ et $A_1A_i = (m-i)a$,

$$t_1 = \frac{qa}{Lh}(m-i)\sqrt{h^2+i^2a^2},$$

$$t_2 = \frac{qai}{Lh}\sqrt{h^2+(m-i)^2a^2}.$$

Les volumes des deux tirants sont donc

$$\frac{qa}{RLh}(m-i)(h^2+a^2i^2),$$

$$\frac{qa}{RLh}\times i[h^2+(m-i^2)a^2],$$

et la somme de ces deux volumes

$$\frac{qam}{RLh}[h^2+i(m-i)a^2] = \frac{q}{Rh}[h^2+i(m-i)a^2];$$

d'où, pour le volume total v_2 de toutes les paires de tirants, au nombre de $m-1$,

$$v_2 = \frac{q}{Rh}\left\{(m-1)h^2+a^2\left[\frac{m^2(m-1)}{2}-\frac{(m-1)m(2m-1)}{6}\right]\right\},$$

ou

$$v_2 = \frac{q(m-1)}{Rh}\left[h^2+\frac{m(m+1)}{6}a^2\right],$$

ou

$$v_2 = \frac{P}{R}\times\frac{m-1}{m}\left(h+\frac{m+1}{6m}\times\frac{L^2}{h}\right).$$

Maintenant, la tension développée dans la semelle par les barres issues de B_i est la projection de t_1 ou de t_2 sur la semelle, soit

$$\frac{qi(m-i)a^2}{Lh}.$$

La tension totale de la semelle est la somme des termes semblables où i varie de 1 à $m-1$, somme égale à

$$\frac{qa^2}{Lh}\left[\frac{m^2(m-1)}{2}-\frac{(m-1)m(2m-1)}{6}\right],$$

ou

$$\frac{qa^2m}{6Lh}(m^2-1),$$

ou

$$\frac{PL}{6h} \times \frac{m^2 - 1}{m^2}.$$

Le volume de la semelle sera donc

$$v_3 = \frac{PL^2}{6Rh} \times \frac{m^2 - 1}{m^4},$$

d'où, pour le volume total V_p de matière nécessaire pour résister à la charge permanente,

$$(37) \qquad V_p = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{P}{R} \times \frac{m-1}{m}\left(2h + \frac{m+1}{3m} \times \frac{L^2}{h}\right).$$

§ 28.

CHARGE ROULANTE. — Lorsque la charge roulante Q passe sur un poinçon $A_i B_i$, elle produit le même effet que si le triangle AB_iA', avec le poinçon $A_i B_i$, résistait seul. On en déduit facilement, en raisonnant comme dans le cas de la charge permanente, que le volume V_q nécessaire pour porter la charge Q, dans quelque position que ce soit, est donné par la formule

$$(38) \qquad V_q = \frac{Q}{R} \times (m-1)\left(2h + \frac{m+1}{3m} \times \frac{L^2}{h}\right),$$

d'où, pour le volume total V de matière nécessaire pour résister à la fois à la charge permanente et à la charge roulante,

$$(39) \qquad V = V_p + V_q,$$

ou

$$(40) \qquad V = \frac{(m-1)}{R}\left(\frac{P}{m} + Q\right)\left(2h + \frac{m+1}{3m} \times \frac{L^2}{h}\right).$$

Ce volume devient minimum, *quel que soit le rapport entre la charge permanente et la charge roulante,* pour

$$(41) \qquad h = \frac{L}{m}\sqrt{\frac{m(m+1)}{6}},$$

d'où

$$(42) \qquad V = \frac{4L(m-1)}{Rm}\left(\frac{P}{m} + Q\right)\sqrt{\frac{m(m+1)}{6}}.$$

Digitized by Google

Pour

$$m = 2, \quad \frac{h}{L} = 0,50, \quad V = \frac{2L}{R}\left(\frac{P}{2} + Q\right),$$

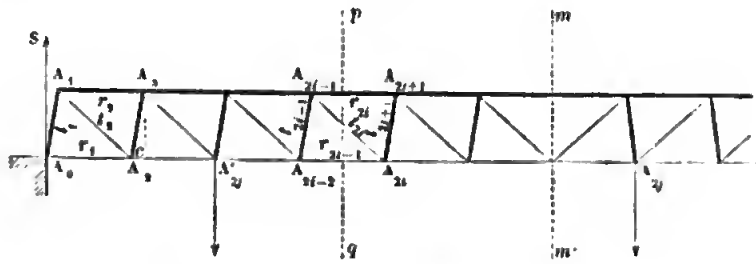
$$m = 3, \quad \frac{h}{L} = 0,47, \quad V = 3,76\,\frac{L}{R}\left(\frac{P}{3} + Q\right).$$

On voit que le volume augmente rapidement quand le nombre m des divisions augmente; mais ce nombre de divisions est, comme nous l'avons déjà dit, commandé, pour chaque valeur de la portée L, par la condition de ne pas avoir des parties trop longues de la semelle soumises à la compression et par suite exposées à fléchir; mais la valeur de m une fois admise, le rapport $\frac{h}{L}$ de la hauteur de la poutre à sa portée, qui donne la plus grande économie de matière, est celui que donne la formule (41); souvent la valeur fournie par ce rapport dépasse ce que l'on a jusqu'ici admis dans la pratique; il convient alors de s'en rapprocher le plus possible; mais nous ne nous arrêtons pas quant à présent à cette discussion, qui sera mieux à sa place plus loin.

§ 29.

SYSTÈMES A TRIANGLES ET EN PARTICULIER SYSTÈME WARREN. — Description. — Considérons maintenant (*fig.* D) une poutre formée de $2n$ triangles tels que $A_0\,A_1\,A_2$, tous égaux, mais d'ailleurs de *forme quelconque*, reposant sur deux appuis ayant entre eux un écartement L.

Fig. D.



Cette poutre est symétrique par rapport à la verticale mn passant par son milieu.

Nous appellerons

$$A_0,\ A_2,\ A_4, \ldots,\ A_{2i}, \ldots,\ A_{2n}$$

les sommets inférieurs, ceux qui sont censés porter la charge;

$$r_2,\ r_4, \ldots,\ r_{2(i-1)}, \ldots,\ r_{2n-2}$$

les tensions des barres horizontales supérieures, c'est-à-dire opposées à ces sommets;

$$A_1,\ A_3,\ A_5, \ldots,\ A_{2i-1}, \ldots$$

les sommets supérieurs, et

$$r_1,\ r_3,\ r_5, \ldots,\ r_{2i-1}, \ldots$$

les tensions des barres horizontales inférieures; enfin

$$t_1,\ t_3,\ t_5, \ldots,\ t_{2i-1}, \ldots,\ t_{2n-1}$$

les tensions des barres inclinées parallèles à la première, à partir de la gauche;

$$t_2,\ t_4,\ t_6, \ldots,\ t_{2i}, \ldots,\ t_{2n}$$

celles des barres inclinées parallèles à la seconde, à partir de la gauche.

§ 30.

Pour trouver simplement les tensions des diverses barres d'une telle poutre, soit pour des charges comme celles que nous considérons, soit pour des charges quelconques, faisons-y une section verticale pq en un point quelconque d'une barre inclinée $A_{2i-1}A_{2i}$. Cette section coupe les trois barres dont les tensions sont représentées par

$$r_{2i},\quad t_{2i},\quad r_{2i-1}.$$

Ces tensions doivent faire équilibre à toutes les forces, y compris les réactions des appuis, appliquées entre la section pq et l'une des extrémités de la poutre, celle de gauche par exemple. Or, la Statique fournissant trois équations pour exprimer cet équilibre, les trois tensions r_{2i}, t_{2i}, r_{2i-1} se trouvent déterminées. On peut même trouver chacune d'elles séparément. En effet, si l'on exprime que la somme des moments de toutes les forces qui doivent se faire équilibre est nulle par rapport au point A_{2i-1}, comme les moments des deux tensions inconnues t_{2i} et r_{2i}, par rapport à ce point, sont nuls, on aura une équation où n'entrera que la seule inconnue r_{2i-1}; si de même on applique le théorème des moments aux points A_{2i}, on aura une équation où n'entrera que la seule inconnue r_{2i}. Enfin, si on projette les forces en équilibre sur une verticale, comme

les projections des deux forces r_{2i} et r_{2i-1} sont nulles, on aura une équation ne contenant que la seule inconnue t_{2i}.

Si la section pq était faite entre les deux points A_{2i-2} et A_{2i-1}, on déterminerait de même les tensions t_{2i-1}.

Ce procédé est beaucoup plus simple que celui que l'on emploie le plus souvent, et qui consiste à faire des décompositions successives de forces en commençant par le point A_0, décomposant la réaction de l'appui suivant les deux barres issues de ce point; puis passant au sommet A_1, et décomposant la tension maintenant connue t_1 et la force directement appliquée en A_1, s'il y en a une, suivant $A_1 A_2$ et $A_1 A_3$, et ainsi de suite.

Ce procédé a, de plus, l'avantage d'introduire dans la question les éléments usités en Résistance des matériaux, à savoir : le *moment fléchissant* et l'*effort tranchant*, définis au § 137 de cet Ouvrage.

Appelons généralement X_i et T_i le moment fléchissant relativement au sommet A_i et l'effort tranchant en ce point. En comptant positivement les forces descendantes, en comptant aussi positivement les moments des forces descendantes lorsqu'elles sont à gauche du centre des moments, on obtient immédiatement, par la méthode que nous venons d'indiquer,

$$\begin{aligned} hr_{2i-1} + X_{2i-1} &= 0, \\ -hr_{2i} + X_{2i} &= 0, \\ t_{2i}\cos\alpha + T_{2i-1} &= 0, \\ -t_{2i-1}\cos\alpha' + T_{2i-2} &= 0, \end{aligned}$$

où h est la hauteur de la poutre, α' et α les angles que les pièces $A_0 A_1$ et $A_1 A_2$ font avec la verticale.

Si l'on désigne par L la longueur de la semelle inférieure divisée en $2n$ parties égales

$$A_0 A_1 = A_1 A_2 = \ldots = \frac{L}{2n},$$

et que c désigne le segment de gauche de l'un des triangles égaux, tels que $A_0 A_1 A_2$, on aura

$$\cos\alpha' = \frac{h}{\sqrt{h^2 + c^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{L}{2n} - c\right)^2}},$$

d'où

$$(43)\quad \begin{cases} r_{2i-1} = -\dfrac{1}{h} X_{2i-1}, \\ r_{2i} = \dfrac{1}{h} X_{2i}, \\ t_{2i} = -\dfrac{1}{h} T_{2i-1} \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{L}{2n} - c\right)^2}, \\ t_{2i-1} = \dfrac{1}{h} T_{2i-2} \sqrt{h^2 + c^2}, \end{cases}$$

et cela quelles que soient les charges que porte la poutre.

§ 31.

Charge permanente. — Supposons d'abord que la poutre porte une charge permanente de p kilogrammes par mètre courant sur la semelle inférieure, en sorte que la charge totale soit

$$P = pL.$$

Chacun des sommets, sauf les deux extrêmes, portera

$$q = \frac{pL}{2n} = \frac{P}{2n},$$

et chacun des deux sommets extrêmes portera $\frac{q}{2}$, en sorte que les réactions des appuis sont

$$S = \frac{P}{2} - \frac{q}{2} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

En appliquant les formules générales du paragraphe précédent, on trouve sans difficulté

$$(43)\quad \begin{cases} t_{2i-1} = \dfrac{P\sqrt{h^2 + c^2}}{2h}\left(1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{i}{n}\right), \\ t_{2i} = -\dfrac{P\sqrt{h^2 + \left(\dfrac{L}{2n} - c\right)^2}}{2h}\left(1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{i}{n}\right), \\ r_{2i-1} = \dfrac{PL}{4nh}(i-1)\left(1 - \dfrac{i-1}{2n}\right) + \dfrac{Pc}{2h}\left(1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{i}{n}\right), \\ r_{2i} = \dfrac{PL}{4nh} i \left(1 - \dfrac{i}{2n}\right). \end{cases}$$

Maintenant, si R est la tension ou la pression que l'on veut faire supporter à la matière (nous supposons toujours qu'elle résiste également bien à l'extension ou à la compression), la section d'une barre qui supporte une tension t_{2i-1} est $\frac{t_{2i-1}}{R}$, et son volume $\frac{t_{2i-1}}{R}\sqrt{h^2+c^2}$.

Donc la somme des volumes des barres parallèles à celles de gauche sera

$$v_1 = 2\sum_{i=1}^{i=n}\frac{t_{2i-1}\sqrt{h^2+c^2}}{R} = \frac{P(h^2+c^2)}{Rh}\sum_{i=1}^{i=n}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{n}{i}\right) = \frac{Rn(h^2+c^2)}{2Rh}.$$

On trouverait de même, pour le volume v_2 des barres inclinées parallèles à la seconde à partir de la gauche,

$$v_2 = \frac{Pn\left[h^2+\left(\frac{L}{2n}-c\right)^2\right]}{2Rh};$$

pour le volume des barres horizontales inférieures,

$$w_1 = 2\sum_{i=1}^{i=n}\frac{L}{2n}\frac{r_{2i-1}}{R}$$

$$= \frac{PL^2}{4n^2Rh}\sum_{i=1}^{i=n}(i-1)\left(1-\frac{i-1}{2n}\right)+\frac{PcL}{2nhR}\sum_{i=1}^{i=n}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{i}{n}\right),$$

ou

$$w_1 = \frac{PL^2(n-1)(4n+1)}{48n^2Rh}+\frac{PcL}{4hR},$$

et enfin, pour le volume w_2 des barres supérieures,

$$w_2 = \frac{PL^2(n-1)(4n+1)}{48n^2Rh}+\frac{PL}{4Rh}\left(\frac{L}{2n}-c\right);$$

d'où, pour le volume total V_p de matière nécessaire pour résister à la charge permanente,

$$V_p = v_1+v_2+w_1+w_2,$$

$$V_p = \frac{Pn}{2Rh}\left(2h^2+2c^2-\frac{cL}{n}+\frac{L^2}{4n^2}\right)+\frac{PL^2}{24n^2Rh}[(n-1)(4n+1)+3n],$$

ou

$$(44)\qquad V_p = \frac{P}{R}\left[nh + \frac{L^2(n+1)(4n-1) - 12cn^2L + 24c^2n^2}{24n^2h}\right],$$

ou

$$(45)\qquad V_p = \frac{P}{R}\left[nh + \frac{L^2(n+1)(4n-1) - 24n^2c\left(\frac{L}{2n} - c\right)}{24n^2h}\right].$$

Le produit $c\left(\frac{L}{2n} - c\right)$ devient maximum pour

$$c = \frac{L}{4n},$$

et alors le volume V_p devient minimum. Ainsi :

Théorème. — *Quel que soit le nombre des triangles et quel que soit le rapport $\frac{h}{L}$ de la hauteur de la poutre à sa portée, les triangles isoscèles sont plus favorables à la résistance que les autres, lorsque la charge à supporter est uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre.*

Et l'on a alors

$$(46)\qquad V_p = \frac{PL}{R}\left(nh + \frac{8n^2 + 3n - 2}{48n^2h}\right).$$

Ce théorème est loin d'être évident, et, comme nous le verrons, il n'a plus lieu pour une charge roulante.

Pour $c = 0$, ainsi que pour $c = \frac{L}{2n}$, on obtient le même volume

$$(47)\qquad V_p = \frac{P}{R}\left[nh + \frac{L^2(n+1)(4n-1)}{24n^2h}\right].$$

En comparant ces volumes pour $n = 1$, par exemple, on trouve

Triangles isoscèles..... $V_p = \frac{PL}{R}\left(h + \frac{3L^2}{16h}\right)$,

Triangles rectangles... $V'_p = \frac{PL}{R}\left(h + \frac{1L^2}{4h}\right)$.

Pour
$$\frac{h}{L} = \frac{1}{10},$$
$$V_p = \frac{PL^2}{R}\left(\frac{1}{10} + \frac{30}{16}\right) = 1,97\,\frac{PL^2}{R} \text{ environ},$$
$$V'_p = \frac{PL^2}{R}\left(\frac{1}{10} + \frac{10}{4}\right) = 2,60\,\frac{PL^2}{R}.$$

On voit donc qu'à prendre les triangles rectangles on perd $\frac{2,60 - 1,97}{1,97} = \frac{0,63}{1,97}$, égal à près de 33 pour 100 du volume de matière.

On peut aussi chercher, pour une valeur donnée de n, la valeur de h qui rend V_p minimum, etc.; nous ne nous arrêterons pas quant à présent à ces discussions, sur lesquelles nous reviendrons.

§ 32.

CHARGE ROULANTE. — Considérons maintenant (*fig.* D) une charge roulante Q au moment où elle est appliquée au point A_{2j}. La réaction sur l'appui sera $Q\left(1 - \frac{j}{2n}\right)$.

Il en résulte, en appliquant les formules (43) du § 30 et ne s'occupant que des valeurs absolues des tensions :

1° Si $j > i - 1$,
$$t_{2i-1} = \frac{Q\sqrt{h^2 + c^2}}{h}\left(1 - \frac{j}{2n}\right);$$

2° Si $j \leqq i - 1$,
$$t'_{2i-1} = \frac{Q\sqrt{h^2 + c^2}}{h} \times \frac{j}{2n}.$$

Donnons à la charge roulante Q la position qui donne à la tension la plus grande valeur possible.

Les deux plus grandes valeurs de t_{2i-1} et de t'_{2i-1} ont lieu, la première pour $j = i$, et la seconde pour $j = i - 1$, d'où
$$t_{2i-1} = \frac{Q\sqrt{h^2 + c^2}}{h}\left(1 - \frac{i}{2n}\right),$$
$$t'_{2i-1} = \frac{Q\sqrt{h^2 + c^2}}{h} \times \frac{i-1}{2n}.$$

Il faut prendre la plus grande de ces deux valeurs, c'est-à-dire la première; car, dans la moitié de la poutre que nous considérons (la seconde moitié étant symétrique, il est inutile de s'en occuper), i est inférieur ou au plus égal à n; d'où résulte

$$1-\frac{i}{2n}>\frac{i-1}{2n}.$$

Cela signifie que le moment où la charge roulante produit la plus grande tension de la barre inclinée est celui où elle atteint l'extrémité inférieure de cette barre. Il résulte de là que le volume v'_1 des barres parallèles à la première de gauche est

$$v'_1=\frac{2\sqrt{h^2+c^2}}{h\mathrm{R}}\sum_{i=1}^{i=n}t_{2i-1},$$

ou

$$v'_1=\frac{2\mathrm{Q}(h^2+c^2)}{h\mathrm{R}}\sum_{i=1}^{i=n}\left(1-\frac{c}{2n}\right),$$

ou

$$v'_1=\frac{\mathrm{Q}(h^2+c^2)(3n-1)}{2h\mathrm{R}}.$$

On trouverait de même, pour les volumes des barres parallèles à la seconde à partir de la gauche,

$$v'_2=\frac{\mathrm{Q}\left[h^2+\left(\frac{\mathrm{L}}{2n}-c\right)^2\right](3n-1)}{2h\mathrm{R}}.$$

La tension r_{2i-1} est donnée pour l'une des deux formules

$$r_{2i-1}=\frac{\mathrm{Q}}{h}\left(1-\frac{j}{2n}\right)\left[c+\frac{\mathrm{L}(i-1)}{2n}\right]\quad\text{si}\quad j>i-1,$$

$$r'_{2i-1}=\frac{\mathrm{Q}}{h}\left\{\left(1-\frac{j}{2n}\right)\left[c+\frac{\mathrm{L}(i-1)}{2n}\right]-\left[c+\frac{\mathrm{L}(i-1-j)}{2n}\right]\right\}\quad\text{si}\quad j\leqq i-1.$$

Ces deux expressions atteignent leurs plus grandes valeurs, la première pour $j=i$, et la seconde pour $j=i-1$, c'est-à-dire que la tension r_{2i-1} d'une barre inférieure est la plus grande possible, quand le poids Q est placé à l'une de ses extrémités. Il faut chercher

laquelle. Or on trouve, pour les deux valeurs indiquées de j,

$$r_{2i-1} = \frac{Q}{h}\left(1 - \frac{i}{2n}\right)\left(c + \frac{L(i-1)}{2n}\right),$$

$$r'_{2i-1} = \frac{Q}{h}\left\{\left(1 - \frac{i-1}{2n}\right)\left[c + \frac{L(i-1)}{2n}\right] - c\right\}$$

$$= r_{2i-1} - \frac{Q}{h}\left[c\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \frac{L(i-1)}{4n^2}\right].$$

Il faut prendre, pour chaque barre, la plus grande de ces valeurs. C'est r_{2i-1} ou r'_{2i-1}, suivant que

$$c\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \gtrless \frac{L(i-1)}{4n^2},$$

ou

$$c \gtrless \frac{L}{4n} \times \frac{i-1}{n - \frac{1}{2}};$$

i peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à n; donc, si

$$c > \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n - \frac{1}{2}}, \tag{48}$$

on aura, pour toutes les valeurs de i,

$$c > \frac{L}{4n} \times \frac{i-1}{n - \frac{1}{2}};$$

r_{2i-1} sera partout supérieur à r'_{2i-1} et le volume des barres supérieures sera donné par la formule

$$w'_1 = 2\sum_{i=1}^{i=n} \times \frac{r_{2i-1}}{R} \times \frac{L}{2n} = \frac{QL}{nRh}\sum_{i=1}^{i=n}\left(1 - \frac{i}{2n}\right)\left(c + \frac{L(i-1)}{2n}\right),$$

ou

$$w'_1 = \frac{QL^2}{12n^2Rh}(n-1)(2n-1) + \frac{QcL}{4nRh}(3n-1).$$

Si

$$c < \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n - \frac{1}{2}}, \tag{48 bis}$$

alors il existera un nombre entier $i = \lambda$, inférieur à n et tel que :

$$(49) \qquad \lambda < 1 + \frac{c\left(n - 1\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{L}{4n}\right)} < \lambda + 1.$$

Pour les valeurs de i comprises entre 1 et λ inclusivement, r_{2i-1} sera plus grand que r'_{2i-1}; pour les valeurs de i supérieures à λ, on aura au contraire $r'_{2i-i} > r_{2i-1}$. Donc, dans ce cas, le volume w'_1 des barres supérieures sera donné par la formule

$$w'_1 = \frac{L}{nR}\left(\sum_{i=1}^{i=\lambda} r_{2i-1} + \sum_{i=\lambda+1}^{i=n} r'_{2i-1}\right),$$

ou

$$w'_1 = \frac{L}{nR}\left(\sum_{i=1}^{i=\lambda} r_{2i-1} + \sum_{i=\lambda+1}^{i=n} \left\{r_{2i-1} + \frac{Q}{h}\left[\frac{L(i-1)}{4n^2} - c\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right]\right\}\right),$$

ou

$$w'_1 = \frac{L}{nR}\sum_{i=1}^{i=n} r_{2i-1} + \frac{QL}{nRh}\sum_{i=\lambda+1}^{i=n}\left[\frac{L}{4n^2}(i-1) - c\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right],$$

ou

$$w'_1 = w_1 + \frac{QL}{2nRh}(n-\lambda)\left[\frac{L}{4n^2}(n+\lambda-1) - c\left(2 - \frac{1}{2n}\right)\right].$$

La plus grande valeur de la tension r_{2i} d'une barre supérieure a lieu, comme on le vérifie aisément par une discussion analogue mais plus simple, quand le poids Q se trouve au point A_{2i} et a pour expression

$$r_{2i} = \frac{QL}{2nh}\left(1 - \frac{i}{2n}\right)i,$$

d'où, pour le volume des barres supérieures,

$$w'_2 = \frac{QL^2}{2n^2Rh}\left[\sum_{i=1}^{i=n}\left(1 - \frac{i}{2n}\right)i\right] - \frac{QcL}{2Rh},$$

ou

$$w'_2 = \frac{QL^2(n+1)(4n-1)}{24n^2Rh} - \frac{QcL}{2Rh},$$

En réunissant les valeurs de v'_1, v'_2, w'_1, w'_2, on trouve pour le volume V_q relatif à la charge roulante :

1° Si $c > \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}}$,

$$(50)\quad V_q = \frac{Q}{R}\left[(3h-1)h + \frac{(n+1)(4n-1)L^2 - 3n(5n-1)cL + 12n^2c^2(3n-1)}{12n^2h}\right];$$

2° Si $c < \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}}$,

$$(50\ bis)\quad V'_q = V_q + (n-\lambda)\left[(n+\lambda-1)\frac{L}{4n^2} - c\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]\frac{QL}{2nRh}.$$

Si l'on fait varier c, la formule (48) montre que, quels que soient n, h et L, le volume V_q devient minimum pour

$$-3n(5n-1)L + 24n^2c(3n-1) = 0,$$

d'où

$$c = \frac{L}{4n} \times \frac{5n-1}{6n-2};$$

mais cette formule n'est applicable que si

$$c > \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}},$$

ou

$$\frac{5n-1}{6n-\frac{1}{2}} > \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$n < 3.$$

Pour

$$(51)\quad \begin{cases} n = 1, & c = \frac{L}{4n} \text{ triangle isoscèle,} \\ n = 2, & c = \frac{9}{10} \times \frac{L}{4n}, \\ n = 3, & c = \frac{7}{8} \times \frac{L}{4n}. \end{cases}$$

Ainsi on voit qu'ici ce ne sont plus toujours, comme lorsqu'il s'est agi de la charge permanente (§ 30), les triangles isoscèles qui fournissent les volumes minimum; mais ce sont des triangles qui s'en rapprochent de telle sorte que pour supporter à la fois une

Digitized by Google

charge permanente et une charge roulante, ce sont ces triangles qu'il convient d'adopter quand on n'a pas de raison spéciale pour prendre une autre forme.

Considérons les trois cas intéressants

$$c = 0, \qquad c = \frac{L}{4n}, \qquad c = \frac{L}{2n}.$$

Dans les deux derniers, on a

$$c > \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}},$$

il faut donc employer la formule (50 *bis*); dans le premier, il faut employer la formule (50) en y faisant $\lambda = 1$, comme le montrent les inégalités (49). On trouve alors :

$c = 0$. Triangles rectangles descendants (*fig.* K ci-après),

$$V_q = \frac{Q}{R}\left[(3n-1)h + \frac{8n^2+9n-5}{24n^2h}L^2\right];$$

$c = \frac{L}{4n}$. Triangles isoscèles (*fig.* G, ci-après),

$$V_q = \frac{Q}{R}\left[(3n-1)h + \frac{8n^2+3n-2}{24n^2h}L^2\right];$$

$c = \frac{L}{2n}$. Triangles rectangles ascendants (*fig.* H ci-après),

$$V_q = \frac{Q}{R}\left[(3n-1)h + \frac{8n^2+9n-5}{24n^2h}L^2\right].$$

Il est remarquable qu'ici, comme dans le cas de la charge permanente, les triangles rectangles descendants et ascendants donnent lieu à la même dépense de matière.

V.

Conclusions pratiques.

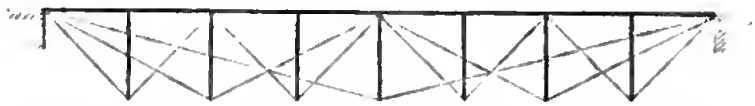
§ 33.

En résumé, si L est la portée d'une poutre, h sa hauteur, si l'on appelle $\delta = \frac{h}{L}$ le rapport de la hauteur à la portée, on trouve, pour le volume V_p de matière nécessaire pour supporter une charge per-

manente $P = pL$ et pour le volume V_q nécessaire pour porter, *dans toutes les positions qu'elle peut occuper*, une charge roulante Q, les formules suivantes :

SYSTÈME FINK.

Fig. E.



Semelle divisée en 2^n parties égales, soit avec $2^n - 1$ montants verticaux.

Charge par-dessus, formules (32), § 22, et (34), § 23 :

$$(52) \qquad V_p = \frac{PL}{R}\left(n\delta + \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3\delta}\right),$$

$$(52\ bis) \qquad V_q = \frac{QL}{R}\left[2(2^n - 1)\delta + \frac{7 - \frac{1}{2^{2n-2}}}{12\delta}\right].$$

Charge par-dessous, formules (34 *bis*), § 24 :

$$(53) \qquad V_p = \frac{PL}{R}\left(\frac{n\delta}{2} + \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3\delta}\right),$$

$$(53\ bis) \qquad V_q = \frac{QL}{R}\left[(2^n - 1)\delta + \frac{7 - \frac{1}{2^{2n-2}}}{12\delta}\right].$$

SYSTÈME BOLLMAN.

Fig. F.

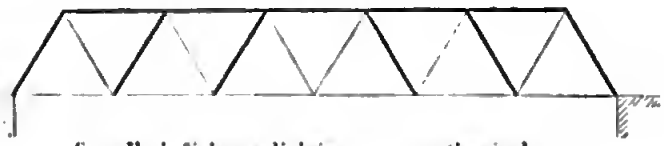
Divisée en $2n$ parties égales.

Charge par-dessus, formules (37), § 27, et (38), § 28, où l'on fera $m = 2n$:

$$(54) \qquad \begin{cases} V_p = \dfrac{PL}{R}\left[\dfrac{2n-1}{n}\left(\delta + \dfrac{2n+1}{12n\delta}\right)\right], \\ V_q = \dfrac{QL}{R}\left[\left(2n-1\right)\left(2\delta + \dfrac{2n+1}{6\delta}\right)\right]. \end{cases}$$

SYSTÈME A TRIANGLES ISOSCÈLES (WARREN).

Fig. G.



Semelle inférieure divisée en $2n$ parties égales.

Charges par-dessous, formules (46), § 31, et (51 *bis*), § 32, où l'on fera $c = \frac{L}{4n}$:

$$(55) \qquad V_p = \frac{PL}{R}\left[n\delta + \frac{8n^2 + 3n - 2}{48n^2\delta}\right],$$

$$(55\ bis) \qquad V_q = \frac{QL}{R}\left[(3n-1)\delta + \frac{8n^2 + 3n - 2}{24n^2\delta}\right].$$

SYSTÈME A TRIANGLES RECTANGLES ASCENDANTS.

Fig. H.

Semelle inférieure divisée en $2n$ parties égales.

Charges par-dessous, formules (47), § 31, et (51 *bis*), § 32 :

$$(56) \qquad V_p = \frac{PL}{R}\left[n\delta + \frac{(n+1)(4n-1)}{24n^2\delta}\right],$$

$$(56\ bis) \qquad V_q = \frac{QL}{R}\left[(3n-1)\delta + \frac{8n^2 + 9n - 5}{24n^2\delta}\right].$$

SYSTÈME A TRIANGLES RECTANGLES DESCENDANTS.

Fig. K.

Semelle inférieure divisée en $2n$ parties égales.

Mêmes formules que pour les triangles rectangles ascendants.

Digitized by Google

Dans le tableau qui suit (§ 35), nous avons calculé ces formules pour les cas où la semelle de longueur L, dans chacune des poutres considérées, est divisée en

$$2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32$$

parties égales. Ces divisions, étant des puissances du nombre 2, sont les seules que comporte le système Fink; nous les avons donc aussi adoptées pour les autres systèmes, afin de bien mettre en parallèle les divers systèmes. Elles correspondent :

1° Dans le cas du système Fink, aux valeurs

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5$$

de n, puisque les divisions, dans cette poutre, sont au nombre de 2^n;

2° Dans les autres systèmes, aux valeurs

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16$$

de n, puisque, dans ces systèmes, le nombre des divisions est $2n$.

Pour chacune des valeurs de n, nous avons fait les calculs, en attribuant au rapport $\delta = \frac{h}{L}$, de la hauteur de la poutre à sa portée, les quatre valeurs

$$\frac{1}{15},\quad \frac{1}{10},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{4}.$$

Ces valeurs comprennent toutes celles généralement admises dans la pratique qui, jusqu'ici du moins, s'est presque toujours tenue dans les limites comprises entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{15}$.

La première colonne porte les valeurs de δ; les autres colonnes fournissent, pour chaque système de poutre et pour chaque système de valeurs de n et de δ, les deux rapports

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{V_p}{\left(\frac{PL}{R}\right)} &= \alpha, \\ \frac{V_q}{\left(\frac{QL}{R}\right)} &= \beta, \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

en sorte que le volume de matière V_p, nécessaire pour porter une charge P, uniformément répartie à raison de $\frac{P}{L}$ kilogrammes par mètre, et de telle sorte que chaque barre supporte une tension ou une pression de R^{kg} par mètre carré de section, est

$$V_p = \alpha \frac{PL}{R}, \tag{58}$$

et le volume de matière V_q, nécessaire pour porter une charge roulante Q, de telle façon que, *dans quelque position qu'elle occupe sur la poutre,* elle n'exerce sur aucune barre une tension ou une pression supérieure à R^{kg} par mètre carré, est

$$V_q = \beta \frac{QL}{R}, \tag{59}$$

et enfin le volume V de matière nécessaire pour porter à la fois les charges P et Q, sans que la tension ou pression par unité de surface dépasse jamais R^{kg}, est

$$V = (\alpha P + \beta Q) \frac{L}{R}. \tag{60}$$

§ 31.

Chacun des coefficients α et β est, d'après les formules ci-dessus, (52) et suivantes, de la forme

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= A_0 \delta + \frac{A_1}{\delta}, \\ \beta &= B_0 \delta + \frac{B_1}{\delta}, \end{aligned} \right. \tag{61}$$

les coefficients A_0, A_1, B_0, B_1 dépendant uniquement du nombre des divisions n. On a donc

$$\left\{ \begin{aligned} V_p &= \left(A_0 \delta + \frac{A_1}{\delta}\right) \frac{PL}{R}, \\ V_q &= \left(B_0 \delta + \frac{B_1}{\delta}\right) \frac{QL}{R}, \end{aligned} \right. \tag{62}$$

Digitized by Google

et, en posant

$$\frac{Q}{P} = \mu, \tag{63}$$

μ étant ainsi le rapport numérique de la surcharge à la charge permanente,

$$V = \left[(A_0 + \mu B_0)\delta + \frac{A_1 + \mu B_1}{\delta}\right]\frac{PL}{R}. \tag{64}$$

De la simple inspection de ces formules, où $\delta = \frac{h}{L}$, il ressort cette conséquence importante, résultant de ce que, dans l'un des deux termes de chaque second membre, δ entre en numérateur et, dans l'autre, en dénominateur : *le volume de matière que dépense une poutre de système donné, pour résister à une charge donnée, ne diminue pas à mesure que la hauteur h de la poutre augmente; il existe, pour chaque poutre, une valeur de h, qui rend ce volume minimum.*

C'est donc cette valeur qu'il faut adopter quand on le peut et dont, en tout cas, il faut se rapprocher le plus possible.

La valeur de δ, qui rend minimum le volume V_p relatif à la charge permanente, s'obtient en égalant à zéro la dérivée $\frac{dV_p}{d\delta}$, ce qui donne

$$A_0 - \frac{A_1}{\delta^2} = 0,$$

ou

$$\delta = \sqrt{\frac{A_1}{A_0}}, \tag{65}$$

et le volume minimum correspondant est

$$V_p = 2\sqrt{A_1 A_0}. \tag{66}$$

La valeur de δ, qui rend minimum le volume V_q, relatif à la charge roulante, est

$$\delta = \sqrt{\frac{B_1}{B_0}}, \tag{67}$$

et la valeur correspondante du volume est

$$V_q = 2\sqrt{B_1 B_0}. \tag{68}$$

Digitized by Google

Dans le tableau qui suit, on a calculé ces valeurs minima; ces valeurs, ainsi que celles du rapport δ auquel elles correspondent, sont marquées en chiffres *gras*.

La valeur de δ, qui rend minimum le volume V correspondant à la charge permanente et à la surcharge réunies, est

$$\delta = \sqrt{\frac{A_1 + \mu B_1}{A_0 + \mu B_0}}, \tag{69}$$

et le volume correspondant de matière est

$$V = 2\sqrt{(A_1 + \mu B_1)(A_0 + \mu B_0)}. \tag{70}$$

Ces valeurs dépendent, en général, du rapport μ entre la surcharge et la charge permanente; la valeur de δ n'est indépendante de ce rapport que dans le cas où

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1},$$

ce qui a lieu pour la poutre Bollman. En tout cas, la valeur de δ, donnant le minimum de V, se calcule sans difficulté, pour chaque système de poutres, au moyen des deux dernières formules.

§ 35.

Voici maintenant le tableau des principales valeurs numériques de V_p et V_q, qu'il suffit d'ajouter pour avoir les valeurs correspondantes de V.

VALEURS de $\delta = \frac{h}{L}$.	SYSTÈME FINK.				SYSTÈME BOLLMAN.	
	VALEURS DE $V_p : \frac{PL}{R} = \alpha$.		VALEURS DE $V_q : \frac{QL}{R} = \beta$.		VALEURS DE $V_p : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $V_q : \frac{QL}{R} =$
	Charge par-dessus.	Charge par-dessous.	Charge par-dessus.	Charge par-dessous.	Charge par-dessus.	Charge par-dessous.
					SEMELLE DIVISÉE EN 2 PARTIES	
	$\delta + \frac{1}{4\delta}$	$\frac{\delta}{2} + \frac{1}{4\delta}$	$2\delta + \frac{1}{2\delta}$	$\delta + \frac{1}{2\delta}$	$\delta + \frac{1}{4\delta}$	$2\delta + \frac{1}{2\delta}$
	Fig. *a*.				Fig. *b*.	
$\frac{1}{15} = 0,067$	3,81	2,30	7,63	7,56	3,81	7,63
$\frac{1}{10} = 0,10$.	2,60	2,10	5,20	5,10	2,60	5,20
$\frac{1}{8} = 0,12$.	2,12	2,06	4,25	4,12	2,12	4,25
$\frac{1}{4} = 0,25$.	1,25	1,12	2,50	2,25	1,25	2,50
0,43.....	"	"	"	"	"	"
0,50.....	1,00	"	2,00	"	1,00	2,00
0,70.....	"	"	"	1,42	"	"
0,71.....	"	0,71	"	"	"	"
					SEMELLE DIVISÉE EN 4 PARTIES	
	$2\delta + \frac{5}{16\delta}$	$\delta + \frac{5}{16\delta}$	$6\delta + \frac{9}{16\delta}$	$3\delta + \frac{9}{16\delta}$	$\frac{3}{2}\left(\delta + \frac{5}{24\delta}\right)$	$3\left(2\delta + \frac{5}{12\delta}\right)$
	Fig. *a'*.				Fig. *b'*.	
$\frac{1}{15} = 0,067$	4,82	4,75	9,33	9,12	4,78	19,12
$\frac{1}{10} = 0,10$.	3,32	3,22	6,22	5,92	3,27	13,10

Digitized by Google

SYSTÈME WARREN.

A TRIANGLES ISOSCÈLES.		A TRIANGLES RECTANGLES ASCENDANTS OU DESCENDANTS.	
VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.
Charge par-dessous			
ALES, SOIT $n = 1$.			
$\delta + \frac{3}{16\delta}$	$2\delta + \frac{3}{8\delta}$	$\delta + \frac{1}{4\delta}$	$2\delta + \frac{1}{2\delta}$
Fig. *c*.		Fig. *d*.	Fig. *e*.
2,87	5,75	3,81	7,63
1,97	3,95	2,60	5,20
1,62	3,25	2,12	4,25
1,00	2,00	1,25	2,50
0,86	**1,72**	"	"
"	"	**1,00**	**2,00**
"	"	"	"
"	"	"	"
ALES, SOIT $n = 2$.			
$2\delta + \frac{3}{16\delta}$	$5\delta + \frac{3}{8\delta}$	$2\delta + \frac{7}{32\delta}$	$5\delta + \frac{15}{32\delta}$
Fig. *c'*.		Fig. *d'*.	Fig. *e'*.
2,94	5,95	3,56	7,36
2,07	4,25	2,18	5,18

Digitized by Google

VALEURS de $\delta = \frac{h}{L}$.	SYSTÈME FINK.			
	VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.		VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	
	Charge par-dessus.	Charge par-dessous.	Charge par-dessus.	Charge par-dessous.
$\frac{1}{8} = 0,12$.....	2,75	2,62	4,62	4,56
$\frac{1}{4} = 0,25$.....	1,75	1,50	3,75	3,00
0,27.....	"	"	"	"
0,30.....	"	"	3,70	"
0,33.....	"	"	"	"
0,39.....	1,58	"	"	"
0,43.....	"	"	"	2,59
0,56.....	"	1.12	"	"
				SEMELLE DIVISÉE EN 8 PARTIES ÉGALES, SOI
	$3\delta + \frac{21}{64\delta}$	$\frac{3\delta}{2} + \frac{21}{64\delta}$	$14\delta + \frac{37}{64\delta}$	$7\delta + \frac{37}{64\delta}$
$\frac{1}{15} = 0,067$.....	5,12	5,02	9,60	9,13
$\frac{1}{10} = 0,10$.....	3,90	3,75	7,17	6,47
$\frac{1}{8} = 0,12$.....	2,99	2,81	6,37	5,49
0,18.....	"	"	"	"
0,19.....	"	"	"	"
0,20.....	"	"	5,69	"
0,22.....	"	"	"	"
$\frac{1}{4} = 0,25$.....	1,06	1,58	5,81	4,06
0,28.....	"	"	"	4,02
0,33.....	1,94	"	"	"
0,42.....	"	"	"	"
0,47.....	"	1,42	"	"
				SEMELLE DIVISÉE EN 16 PARTIES ÉGALES, SOI
	$4\delta + \frac{85}{256\delta}$	$2\delta + \frac{85}{256\delta}$	$30\delta + \frac{149}{256\delta}$	$15\delta + \frac{149}{256\delta}$
$\frac{1}{15} = 0,067$.....	5,26	5,13	10,73	9,73

Digitized by Google

SYSTÈME BOLLMAN.		SYSTÈME WARREN.			
		A TRIANGLES ISOSCELES.		A TRIANGLES RECTANGLES ASCENDANTS OU DESCENDANTS.	
VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.
Charge par-dessus.	Charge par-dessous.	Charge par-dessous.			
2,68	10,75	1,75	3,62	2,00	4,37
1,62	6,50	1,25	2,75	1,37	3,12
"	"	"	**2,73**	"	"
"	"	**1,24**	"	"	**3,04**
"	"	"	"	**1,32**	"
"	"	"	"	"	"
1,37	**5,47**	"	"	"	"
"	"	"	"	"	"

FINK..... $n = 3$.

BOLLMAN ET WARREN. $n = 4$.

$\left(\delta + \frac{3}{16}\right)$	$7\left(2\delta + \frac{3}{8\delta}\right)$	$4\delta + \frac{23}{128\delta}$	$11\delta + \frac{23}{64\delta}$	$4\delta + \frac{25}{128\delta}$	$11\delta + \frac{53}{128\delta}$
5,04	40,32	2,96	6,12	3,18	6,94
3,45	27,60	2,20	4,79	2,35	5,24
2,83	22,64	1,93	4,24	2,01	4,68
"	"	"	**3,97**	"	"
"	"	"	"	"	**4,25**
"	"	"	"	"	"
"	"	**1,70**	"	**1,76**	"
1,75	14,00	1,71	4,18	1,78	4,47
"	"	"	"	"	"
"	"	"	"	"	"
1,47	**11,76**	"	"	"	"
"	"	"	"	"	"

FINK..... $n = 4$.

BOLLMAN ET WARREN.. $n = 8$.

$\frac{3}{4}\left(\delta + \frac{17}{96\delta}\right)$	$15\left(2\delta + \frac{17}{48\delta}\right)$	$8\delta + \frac{89}{512\delta}$	$23\delta + \frac{89}{256\delta}$	$8\delta + \frac{93}{512\delta}$	$23\delta + \frac{93}{512\delta}$
5,10	81,60	3,13	6,73	3,24	7,18

Digitized by Google

VALEURS de $\delta = \frac{h}{L}$.	SYSTÈME FINK.			
	VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{K} = \alpha$.		VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{K} = \beta$.	
	Charge par-dessus.	Charge par-dessous.	Charge par-dessus.	Charge par-dessous.
$\frac{1}{10} = 0,10$.....	3,72	3,52	8,82	7,32
$\frac{1}{8} = 0,12$.....	3,15	2,90	8,40	6,59
0,13.....	"	"	**8,36**	"
0,14.....	"	"	"	"
0,15.....	"	"	"	"
0,20.....	"	"	"	**5,90**
$\frac{1}{4} = 0,25$.....	2,30	1,82	9,81	6,07
0,28.....	**2,30**	"	"	"
0,40.....	"	**1,63**	"	"
0,42.....	"	"	"	"

SEMELLE DIVISÉE E

32 PARTIES ÉGALES, S

	$5\delta + \frac{341}{1024\delta}$	$\frac{5\delta}{2} + \frac{341}{1024\delta}$	$62\delta + \frac{597}{1024\delta}$	$31\delta + \frac{597}{1024\delta}$
$\frac{1}{15} = 0,067$.....	5,33	5,16	12,87	10,80
0,08.....	"	"	"	"
0,09.....	"	"	**12,02**	"
$\frac{1}{10} = 0,10$.....	3,83	3,58	12,03	8,93
0,10.....	"	"	"	"
$\frac{1}{8} = 0,12$.....	3,28	2,97	12,41	8,53
0,13.....	"	"	"	**8,51**
$\frac{1}{4} = 0,25$.....	2,58	1,95	17,83	10,68
0,25.....	**2,58**	"	"	"
0,36.....	"	**1,83**	"	"
0,41.....	"	"	"	"

Digitized by Google

SYSTÈME BOLLMAN.		SYSTÈME WARREN.			
		A TRIANGLES ISOSCÈLES.		A TRIANGLES RECTANGLES ASCENDANTS OU DESCENDANTS.	
VALEURS $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.
Charge par-dessous.	Charge par-dessous.	Charge par-dessous.			
3,50	56,00	2,53	5,77	2,61	6,07
2,89	46,24	2,40	5,67	2,44	5,87
"	"	"	**5,66**	"	**5,87**
"	"	**2,36**	"	"	"
"	"	"	"	**2,41**	"
"	"	"	"	"	"
1,80	28,80	2,70	7,15	2,72	7,25
"	"	"	"	"	"
"	"	"	"	"	"
1,57	**25,12**	"	"	"	"

FINK..... $n = 5$.
BOLLMAN ET WARREN.. $n = 16$.

$\left(\delta + \frac{11}{64\delta}\right)$	$31\left(2\delta + \frac{11}{32\delta}\right)$	$16\delta + \frac{349}{2048\delta}$	$47\delta + \frac{349}{1024\delta}$	$16\delta + \frac{357}{2048\delta}$	$47\delta + \frac{727}{2048\delta}$
5,12	163,84	3,61	8,24	3,67	8,48
"	"	"	**8,00**	"	"
"	"	"	"	"	**8,18**
3,50	112,00	3,30	8,10	3,34	8,26
"	"	**3,30**	"	**3,34**	"
2,90	92,80	3,36	8,59	3,40	8,69
"	"	"	"	"	"
1,81	57,92	4,68	15,65	4,69	13,16
"	"	"	"	"	"
"	"	"	"	"	"
1,60	**51,46**	"	"	"	"

De ce tableau et des divers théorèmes établis dans ce Mémoire ressortent les conséquences suivantes :

1° Quel que soit le système de poutre employé, le volume de matière à dépenser pour résister à une charge donnée ne diminue pas, comme on pourrait le croire, à mesure que la hauteur de la poutre augmente. Il existe, pour chaque système de poutre, une hauteur donnant lieu à la plus grande économie possible de matière. Ce sont ces hauteurs indiquées en chiffres plus forts au tableau précédent qu'il faut adopter ou dont il convient au moins de se rapprocher le plus possible; en les dépassant, loin d'obtenir une économie, on augmente souvent la dépense dans des proportions qu'on soupçonnerait difficilement. Ainsi, pour la poutre à triangles isocèles dont la semelle serait divisée en 32 parties égales, cette hauteur, la plus favorable pour porter une surcharge Q, est égale au $\frac{4}{100}$ de la portée L, hauteur, comme on le voit, très-pratique ; et la dépense de matière correspondante est $8 \times \frac{Q}{LR}$; mais si l'on s'avisait de porter cette hauteur au quart de la portée, la dépense de matière serait $15{,}65\,\frac{R}{QL}$; c'est-à-dire que, loin d'être moindre, elle serait presque doublée.

On remarquera, du reste, que dès que le nombre des divisions de la semelle est un peu considérable, ce qui a toujours lieu pour les portées moyennes et grandes, les hauteurs les plus favorables varient du $\frac{1}{8}$ au $\frac{1}{12}$, et même du $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{12}$ de la portée. Il est remarquable que ces chiffres, indiqués par la théorie, soient précisément ceux que la pratique a consacrés; mais ce que les praticiens n'ont certainement pas remarqué, c'est qu'il y a, en général, à perdre et non à gagner à dépasser notablement ces hauteurs.

2° Quel que soit le système de poutre employé, le volume de matière à dépenser pour résister à une charge donnée, avec une poutre dont la hauteur et la portée restent les mêmes, croît rapidement avec le nombre des parties dans lesquelles on divise la semelle, c'est-à-dire avec n. Mais ce nombre n, comme nous l'avons déjà dit, est, dans la pratique, commandé ou à peu près, par la nécessité de ne pas laisser des portions de semelles trop longues, sans liaison avec le reste de la pièce, autrement ces portions de semelles fléchiraient sous l'action de leur poids et sous l'action des

charges roulantes. Ceci est surtout important quand la semelle est comprimée.

3° Si l'on compare les trois espèces de poutres (Fink, Bollman et Warren), pour un même système de valeurs de n et de δ, on voit que, pour la charge roulante, c'est toujours la poutre à triangles isoscèles qui l'emporte; pour la charge permanente, elle l'emporte aussi, sauf pour des valeurs très-grandes de n et de δ; on peut déduire de là que, sauf de très-rares exceptions que nos formules (63) et (64) indiqueront facilement, elle l'emportera aussi pour les deux charges réunies. Ainsi cette poutre doit être regardée comme supérieure aux systèmes Fink et Bollman, à ce dernier surtout, qui est admissible pour des charges uniformes, mais qui, pour des charges roulantes, doit être absolument proscrit (*); et en adoptant les poutres à triangles, ce ne sont pas des économies insignifiantes que l'on fait, mais des économies pouvant aller à 50 pour 100, et plus, du volume de matière employée.

Ainsi, pour une poutre dont la semelle serait divisée en 32 parties et dont la hauteur serait égale à $\frac{1}{12}$ de la portée, chiffre très-usuel, il faut, pour porter une charge permanente P, les volumes de matière suivants :

Fink.....	$5,33\,\frac{PL}{R}$,
Bollman.....	$5,12\,\frac{PL}{R}$,
Triangles isoscèles....	$3,61\,\frac{PL}{R}$,
Triangles rectangles...	$3,67\,\frac{PL}{R}$,

c'est-à-dire que le système Bollman exige 42 pour 100, et le système Fink 48 pour 100 de matière de plus que le système à triangles isoscèles.

Pour porter, dans les mêmes conditions, la charge roulante Q, il faut :

(*) En réalité, dans la pratique, il n'y a pas de charges concentrées sur un point; les charges roulantes, telles que les trains de chemins de fer, se répartissent sur une longueur finie, c'est-à-dire, dans la poutre Bollman, entre plusieurs paires de tirants; le désavantage que présente cette poutre est par là un peu atténué; mais il n'en subsiste pas moins très-considérable.

Digitized by Google

Fink.....	$12,87 \frac{QL}{R}$,
Bollman.....	$163,84 \frac{QL}{R}$,
Triangles isoscèles....	$8,24 \frac{QL}{R}$,
Triangles rectangles...	$8,48 \frac{QL}{R}$,

c'est-à-dire que le système Fink exige 56 pour 100 de matière de plus que le système à triangles isoscèles; quant au système Bollman, nous n'en parlons pas; il nous semble tout à fait inadmissible dans ce cas.

Le système à triangles rectangles exige 3 pour 100 de matière de plus que celui à triangles isoscèles.

Nous ne prétendons pas que ces chiffres, rigoureux en théorie, le soient au même degré dans la pratique, puisque là il faut tenir compte encore du volume de matière que nécessitent les assemblages, les pièces destinées à empêcher la voilure des barres, etc.; mais ces chiffres indiquent, de façon à ne laisser subsister à cet égard aucun doute, les valeurs *relatives* des divers systèmes mis en parallèle; et même une fois qu'on aura déterminé par l'expérience, ce qui ne paraît pouvoir offrir aucune difficulté, les proportions dans lesquelles il convient d'augmenter les volumes théoriques ci-dessus trouvés, pour tenir compte des pièces d'assemblage, de contreventement, etc., nos formules permettront de faire en quelques instants les devis comparatifs de divers systèmes de poutres et de choisir, dans chaque cas, le meilleur.

4° Si maintenant on compare les mêmes systèmes, non plus pour des valeurs données de n et de δ, mais au point de vue du *minimum* de dépense de matière dont chaque système est susceptible, pour résister à une charge donnée, avec un nombre donné de divisions de la semelle, on trouve encore que, presque toujours, l'avantage appartient à la poutre à triangles isoscèles, surtout si la charge roulante est considérable; pour la charge permanente seule, il n'en serait pas toujours ainsi et, pour ce genre de charges, la préférence devrait être donnée tantôt au système Fink, tantôt au système Bollman, tantôt au système à triangles; mais ce dernier réalise, en général, le minimum de dépense avec de moindres hauteurs de poutres, ce qui, en pratique, le rendrait supérieur, même quand le volume minimum

auquel il donne lieu dépasserait un peu celui relatif à une des deux autres poutres. Si, par exemple, on suppose seize divisions de la semelle, le minimum de matière nécessaire pour résister à une charge permanente P est,

Fink.....	$2,30\,\frac{PL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,28$,
Bollman.....	$1,57\,\frac{PL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,42$,
Triangles isoscèles.	$2,36\,\frac{PL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,14$,
» rectangles.	$2,41\,\frac{PL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,15$.

Le système le plus économique serait le système Bollman ; mais, pour arriver à réaliser l'économie qu'il offre, il faudrait construire une poutre dont la hauteur fût les $\frac{42}{100}$ de la portée, ce qui, pour des portées un peu considérables, serait inadmissible : l'avantage est donc ici purement théorique.

Vient ensuite le système Fink, qui dépense un volume de matière égal à $2,30\,\frac{PL}{R}$, avec une hauteur de poutre qui serait les $\frac{28}{100}$, c'est-à-dire plus du quart de la portée : c'est encore irréalisable pour des grandes portées.

Quant à la poutre à triangles isoscèles, elle dépense $2,36\,\frac{PL}{R}$ de matière, c'est-à-dire très-peu plus que la poutre Fink et elle dépense ce volume avec une hauteur de poutre à peine de moitié. Elle l'emportera donc, dans la pratique, même au point de vue où nous nous plaçons ici.

Si l'on fait maintenant les mêmes comparaisons pour une charge roulante Q, on trouve les dépenses minima de matière suivantes :

Fink.....	$8,36\,\frac{QL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,13$,
Bollman.....	$25,12\,\frac{QL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,42$,
Triangles isoscèles..	$5,66\,\frac{QL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,13$,
Triangles rectangles.	$5,86\,\frac{QL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,13$.

Digitized by Google

Ici l'on voit, sans discussion, que l'avantage appartient au système à triangles isoscèles, avantage considérable puisqu'il donne, sur le système Fink, une économie de 47 pour 100 de matière, avantage effectif, puisqu'il se produit moyennant une hauteur de poutre parfaitement pratique.

4° Ainsi, à quelque point de vue qu'on se place, le système à triangles est supérieur au point de vue économique au système Fink et plus encore au système Bollman; d'un autre côté, nous avons vu, dans la théorie générale des systèmes d'égale résistance, qu'il est nécessairement plus économique que les systèmes à croix de Saint-André et à treillis; et il résulte aussi de cette théorie qu'il est plus économique que les systèmes Jones, Linville, Murphy-Whipple, etc. qui tous dérivent des systèmes à treillis ou à croix de Saint-André et contiennent les mêmes lignes surabondantes que ces derniers (seulement en moins grand nombre): nous pouvons donc conclure que la poutre à triangles, et en particulier celle à triangles isoscèles, est, au point de vue où nous nous sommes placé, la meilleure des poutres connues.

5° Il se peut qu'on découvre des systèmes mieux disposés encore; mais on devra, en tous cas, les chercher parmi les figures géométriques ne contenant pas de lignes surabondantes; car, étant donné un système à lignes surabondantes, on peut toujours (théorème V) trouver un système sans lignes surabondantes plus (ou pour le moins aussi) économique que lui (*).

6° Si l'on ajoute à cela que les systèmes sans lignes surabondantes sont (théorème I) les seules dont les tensions puissent être calculées à l'aide des principes de la Statique élémentaire; que, par suite, les calculs sont plus sûrs et plus simples que ceux de la Résistance des matériaux; qu'ils peuvent d'ailleurs être remplacés par les procédés si commodes et si expéditifs de la Statique graphique; si l'on ajoute encore que les systèmes sans lignes surabondantes, par cela seul qu'ils renferment un moins grand nombre de pièces, comportent des pièces plus robustes, plus faciles à assembler, moins sujettes à être affaiblies par l'oxydation ou la pourriture, moins sensibles aux trépidations, moins exposées à être faussées lors de la

(*) *Voir*, au sujet de l'emploi exclusif des systèmes sans lignes surabondantes, l'observation placée au bas de la page 240.

Digitized by Google

pose ou à être affamées par les pièces d'assemblage, on reconnaîtra qu'il y a véritablement intérêt, en cette matière, à se conformer très-scrupuleusement aux préceptes de la théorie. Il est peu de questions où elle fournisse des résultats aussi simples, aussi conformes au bon sens, aussi faciles et aussi utiles à mettre en application.

FIN.

8 GEN 1376

1013 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Digitized by Google

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco par la poste dans toute la France.

TABLES
DE LOGARITHMES
A 7 DÉCIMALES

POUR LES NOMBRES DEPUIS 1 JUSQU'A 108000, ET POUR LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DE DIX SECONDES EN DIX SECONDES,

ET

TABLE D'INTERPOLATION

POUR LE CALCUL DES PARTIES PROPORTIONNELLES,

PAR L. SCHRÖN;

PRÉCÉDÉES D'UNE INTRODUCTION

PAR J. HOÜEL,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

Deux beaux volumes grand in-8 jésus, tirés sur vélin collé; 1873.

	PRIX : Broché.	Cartonné.
Tables de Logarithmes	8 fr.	9 fr. 75 c.
Table d'Interpolation	2 fr.	3 fr. 25 c.
Tables de Logarithmes et Table d'Interpolation réunies en un seul volume	10 fr.	11 fr. 75 c.

Les Tables, dont nous publions une édition française, se distinguent de toutes celles qui ont paru jusqu'à ce jour par les soins extrêmes qui ont été apportés à tout ce qui peut en augmenter la précision et en faciliter l'usage.

L'Auteur s'est proposé de remplir les conditions suivantes :

1° Éviter toute opération écrite dans les calculs auxiliaires d'interpolation;

2° Atteindre, en même temps, une exactitude supérieure à celle que peuvent donner les autres Tables de même étendue;

3° Permettre au calculateur de varier à son gré les méthodes d'interpolation suivant qu'il recherchera de préférence la précision ou la rapidité dans ses opérations;

4° Offrir, pour les calculs à six décimales, des moyens aussi commodes et plus exacts que les Tables ordinaires à six figures;

5° Donner aux Tables une disposition qui plaise à l'œil sans le fatiguer. (*Voir ci-après les spécimens des Tables I et II.*)

Pour satisfaire à la première condition, l'Auteur a inscrit les parties proportionnelles des différences tabulaires non-seulement pour les logarithmes des nombres, mais encore pour ceux des fonctions trigonométriques.

Afin de rendre les interpolations plus exactes, ces parties proportionnelles sont données complétement, avec une décimale, et non plus réduites à leur partie entière comme dans la plupart des Recueils de Tables.

Pour donner encore plus de facilité, on a joint aux deux Tables principales, dont se compose l'Ouvrage, une Table d'interpolation, servant au calcul rapide des parties proportionnelles de toutes les différences tabulaires, et susceptible, en outre, d'usages très-variés.

Les logarithmes des Tables n'étant que des valeurs approchées à moins d'une demi-unité près de l'ordre de leur dernier chiffre, il en résulte, dans les calculs logarithmiques, des erreurs inévitables, qui, en s'accumulant, peuvent influer sensiblement sur le dernier chiffre du résultat final. On peut réduire ces erreurs de moitié, sans augmenter le nombre des chiffres de la Table, en prenant soin de distinguer, par un point ou par un petit trait horizontal placé sous le dernier chiffre, les logarithmes *approchés par excès* des logarithmes *approchés par défaut*.

Grâce à cette indication, les Tables actuelles permettent d'atteindre une précision double de celle que donnent les Tables ordinaires, et peuvent, dans les calculs les plus délicats de la Géodésie et de l'Astronomie, suppléer à l'absence de Tables à huit décimales. Lorsqu'on pourra se contenter d'une moindre approximation, on n'aura qu'à négliger les indications des chiffres forcés, et à procéder par la méthode plus expéditive dont on se sert habituellement. Elles peuvent, en même temps, remplacer, dans tous les cas possibles, les Tables d'un moindre nombre de figures, les Tables à six décimales, par exemple. Lorsqu'on veut, en effet, supprimer une décimale dans les logarithmes, il arrive, en moyenne, une fois sur dix que le chiffre à supprimer est un 5. Avec les Tables ordinaires à sept décimales, on ignore si ce chiffre 5 a été forcé ou non et, par suite, quand on le supprime, on ne peut savoir s'il faut ou non forcer le chiffre précédent pour obtenir le logarithme à moins d'une demi-unité près du sixième ordre, tel qu'on le trouverait dans les bonnes Tables à six décimales. On évite cet embarras par l'usage des chiffres soulignés.

Sous le rapport de la correction, les Tables actuelles peuvent soutenir avantageusement la comparaison avec toutes celles qu'on possède jusqu'ici. Depuis l'année 1859, où ces Tables ont paru pour la première fois, toutes les erreurs typographiques, en petit nombre, que l'on y a découvertes ont été signalées dans les *Archives de Grunert*, et corrigées sur les clichés aussitôt qu'indiquées.

M. le professeur Gerneath, de Vienne, dans un travail comparatif sur les principales Tables mathématiques anciennes et modernes, a dressé une statistique fort curieuse du nombre des fautes qu'il y a rencontrées, et, dans la liste où il les a rangées par ordre de correction, les Tables de Schrön ont été placées hors ligne au premier rang. Aussi M. Gerneath n'hésite-t-il pas à proclamer cet Ouvrage « comme le plus remarquable et le plus correct de tous les Recueils de Tables qui aient jamais paru ».

La disposition des Tables est d'une grande simplicité. La Table des logarithmes des nombres renferme 50 lignes par page, ce qui facilite beaucoup les recherches. Dans la colonne des arguments marqués *Num.* (*numerus*), on a conservé tous les chiffres, parce qu'on a reconnu que toute suppression faite dans cette colonne rend la lecture plus pénible, surtout quand il s'agit de revenir du logarithme au nombre.

Cette même Table renferme, comme celle de Callet, mais sous une forme plus commode et avec plus d'étendue, les logarithmes des rapports trigonométriques qui servent au calcul des sinus et des tangentes des petits arcs.

La belle exécution typographique de ces Tables contribue aussi pour beaucoup à leur commodité. Le format adopté a permis d'employer des caractères assez forts et convenablement espacés, tant pour le texte que pour les Tables auxiliaires. L'usage du trait inférieur pour distinguer les chiffres forcés n'était possible qu'avec des chiffres d'*égale hauteur*, et ceux qui ont été gravés pour les Tables actuelles, avec des traits d'épaisseur uniforme, ne le cèdent ni en élégance, ni en clarté aux chiffres anciens de *hauteur inégale*. La qualité supérieure du papier donne une grande facilité pour feuilleter rapidement le volume, en même temps qu'elle en assure la durée.

Le succès de ces Tables a pleinement répondu à tant de soins. Elles ont été l'objet des appréciations les plus favorables de la part des autorités scientifiques les plus compétentes, et il en a été publié des éditions dans presque toutes les langues de l'Europe : en anglais, en danois, en hollandais, en hongrois, en italien, en suédois.

L'édition française présente plusieurs améliorations importantes. L'instruction de l'Auteur sur l'usage des Tables est reproduite sous une forme plus abrégée et plus claire. L'Éditeur a comblé une lacune fâcheuse, en ajoutant une Table de divers nombres usuels avec leurs logarithmes, et il a beaucoup facilité l'emploi de ce Recueil, en répétant, au bas des pages de la Table I, ceux de ces nombres qui se présentent le plus souvent dans les calculs, et en inscrivant en gros caractères les nombres de degrés en haut et en bas des pages de la Table II.

1410 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Num. 315 — 319. Log. 498 — 505.

0° 5′	0° 52′	Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15″	30″	3150	498 3106	3243	3381	3519	3657	3795	3933	4071	4208	4346
	31	3151	4484	4622	4760	4897	5035	5173	5311	5449	5587	5724
	32	3152	5862	6000	6138	6275	6413	6551	6689	6826	6964	7102
	33	3153	7240	7377	7515	7653	7791	7928	8066	8204	8341	8479
	34	3154	8617	8755	8892	9030	9168	9305	9443	9581	9718	9856
	35	3155	9994	•0131	•0269	•0407	•0544	•0682	•0819	•0957	•1095	•1232
	36	3156	499 1370	1508	1645	1783	1920	2058	2196	2333	2471	2608
	37	3157	2746	2883	3021	3158	3296	3434	3571	3709	3846	3984
	38	3158	4121	4259	4396	4534	4671	4809	4946	5084	5221	5359
	39	3159	5496	5634	5771	5909	6046	6184	6321	6459	6596	6733
16″	40″	3160	6871	7008	7146	7283	7421	7558	7695	7833	7970	8108
	41	3161	8245	8382	8520	8657	8794	8932	9069	9207	9344	9481
	42	3162	9619	9756	9893	•0031	•0168	•0305	•0443	•0580	•0717	•0855
	43	3163	500 0992	1129	1267	1404	1541	1678	1816	1953	2090	2227
	44	3164	2365	2502	2639	2777	2914	3051	3188	3325	3463	3600
	45	3165	3737	3874	4012	4149	4286	4423	4560	4698	4835	4972
	46	3166	5109	5246	5383	5521	5658	5795	5932	6069	6206	6344
	47	3167	6481	6618	6755	6892	7029	7166	7303	7440	7578	7715
	48	3168	7852	7989	8126	8263	8400	8537	8674	8811	8948	9085
	49	3169	9222	9359	9496	9634	9771	9908	•0045	•0182	•0319	•0456
17″	50″	3170	501 0593	0730	0867	1004	1141	1278	1415	1552	1688	1825
	51	3171	1962	2099	2236	2373	2510	2647	2784	2921	3058	3195
	52	3172	3332	3469	3606	3743	3879	4016	4153	4290	4427	4564
	53	3173	4701	4838	4974	5111	5248	5385	5522	5659	5796	5932
	54	3174	6069	6206	6343	6480	6617	6753	6890	7027	7164	7301
	55	3175	7437	7574	7711	7848	7984	8121	8258	8395	8531	8668
	56	3176	8805	8942	9078	9215	9352	9489	9625	9762	9899	•0035
	57	3177	502 0172	0309	0446	0582	0719	0856	0992	1129	1266	1402
	58	3178	1539	1676	1812	1949	2086	2222	2359	2495	2632	2769
	59	3179	2905	3042	3178	3315	3452	3588	3725	3861	3998	4135
18″	53′	3180	4271	4408	4544	4681	4817	4954	5091	5227	5364	5500
	1″	3181	5637	5773	5910	6046	6183	6319	6456	6592	6729	6865
	2	3182	7002	7138	7275	7411	7548	7684	7821	7957	8093	8230
	3	3183	8366	8503	8639	8776	8912	9049	9185	9321	9458	9594
	4	3184	9731	9867	•0003	•0140	•0276	•0413	•0549	•0685	•0822	•0958
	5	3185	503 1094	1231	1367	1503	1640	1776	1912	2049	2185	2321
	6	3186	2458	2594	2730	2867	3003	3139	3276	3412	3548	3684
	7	3187	3821	3957	4093	4229	4366	4502	4638	4774	4911	5047
	8	3188	5183	5319	5456	5592	5728	5864	6000	6137	6273	6409
	9	3189	6545	6681	6818	6954	7090	7226	7362	7498	7635	7771
19″	10″	3190	7907	8043	8179	8315	8451	8587	8724	8860	8996	9132
	11	3191	9268	9404	9540	9676	9812	9948	•0085	•0221	•0357	•0493
	12	3192	504 0629	0765	0901	1037	1173	1309	1445	1581	1717	1853
	13	3193	1989	2125	2261	2397	2533	2669	2805	2941	3077	3213
	14	3194	3349	3485	3621	3757	3893	4029	4165	4301	4437	4573
	15	3195	4709	4845	4980	5116	5252	5388	5524	5660	5796	5932
	16	3196	6068	6204	6339	6475	6611	6747	6883	7019	7155	7291
	17	3197	7426	7562	7698	7834	7970	8106	8241	8377	8513	8649
	18	3198	8785	8920	9056	9192	9328	9464	9599	9735	9871	•0007
	19	3199	505 0142	0278	0414	0550	0685	0821	0957	1093	1228	1364
k. 2	k. 3	Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.	
138	
1	13.8
2	27,6
3	41,4
4	55,2
5	69,0
6	82,8
7	96.6
8	110.4
9	124.2
137	
1	13,7
2	27.4
3	41.1
4	54,8
5	68,5
6	82,2
7	95,9
8	109,6
9	123.3
136	
1	13.6
2	27,2
3	40,8
4	54,4
5	68,0
6	81,6
7	95.2
8	108.8
9	122.4
135	
1	13,5
2	27.0
3	40,5
4	54,0
5	67.5
6	81,0
7	94,5
8	108.0
9	121.5

° ′ ″	S. 4,685	D	T. 4,685	D	Log. Sin.	Log. Tang.
0. 52. 20	5580 9	—	6084 2	+	8.182 4877	8.182 5381
52. 30	5579 9	10	6086 3	21	8.183 8685	8.183 9192
52. 40	5578 8	11	6088 5	22	8.185 2450	8.185 2959
52. 50	5577 7	11	6090 6	21	8.186 6170	8.186 6683
53. 0	5576 6	11	6092 8	22	8.187 9848	8.188 0364
53. 10	5575 5	11	6094 9	21	8.189 3482	8.189 4002
53. 20	5574 5	10	6097 1	22	8.190 7074	8.190 7597
Δa″ =	0,″0004		0,″0008			

ENDRÈS (E.), ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — **Manuel du Conducteur des Ponts et Chaussées**, d'après le dernier *Programme officiel des examens*. Ouvrage indispensable aux Conducteurs et Employés secondaires des Ponts et Chaussées et des Compagnies de Chemins de fer, aux Gardes-mines, aux Gardes et Sous-officiers de l'Artillerie et du Génie, aux Agents voyers et à tous les Candidats à ces emplois. 5e édition. TOME Ier, PARTIE THÉORIQUE, avec 290 figures dans le texte; et TOME II, PARTIE PRATIQUE, avec 323 figures dans le texte et 4 planches d'instruments dessinés et gravés d'après les meilleurs modèles. 2 volumes in-8, 1873, qui se vendent ensemble ..... 15 fr.

Le TOME III, APPLICATIONS, qui est sous presse, paraîtra dans le cours du mois d'août 1874, et se vendra séparément.

Ce dernier volume sera consacré à l'exposition des doctrines spéciales qui se rattachent à l'*Art de l'Ingénieur* en général et au service des Ponts et Chaussées en particulier.

GÉRARDIN (H.), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — **Théorie des moteurs hydrauliques**; *Applications et travaux exécutés pour l'alimentation du Canal de l'Aisne à la Marne par des machines*. In-8, avec Atlas contenant 25 belles planches in-plano raisin; 1872..... .. 20 fr.

JAMIN (J.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris. — **Petit Traité de Physique**, à l'usage des Établissements d'instruction, des aspirants aux Baccalauréats et des Candidats aux Écoles du Gouvernement. In-8, avec 686 figures dans le texte et un spectre en couleur; 1870. (Ouvrage complet.). ..... 8 fr.

Depuis le commencement de ce siècle, la Physique a été renouvelée dans son ensemble : aussi ne peut-on qu'approuver l'Auteur du *Petit Traité de Physique* d'avoir, même dans un livre élémentaire, exposé cette science au point de vue des théories nouvelles. Dès les premiers mots, l'Auteur démontre que la Chaleur est un mouvement moléculaire, et cette idée guide ensuite le lecteur dans toutes les expériences et les explications. La Terre et les aimants n'étant que des solénoïdes, on fait dépendre le Magnétisme de l'Électricité. L'Acoustique montre dans leurs détails les vibrations longitudinales, transversales, circulaires et elliptiques; elle prépare à l'Optique. Cette dernière Partie enfin est l'étude des vibrations de toute sorte qui se produisent dans l'éther; les interférences et la polarisation sont expliquées de la manière la plus élémentaire, et la Théorie vibratoire est rendue accessible à tous. Un tel mode d'enseignement est appelé à rendre un réel service aux élèves en les délivrant de ce que les savants ont abandonné, en élevant leur esprit jusqu'à de plus hautes conceptions, en leur montrant l'ensemble philosophique d'une science déjà très-avancée et qui semble toucher à son terme.

MOUTIER (J.), Professeur au Collége Stanislas. — **Éléments de Thermodynamique**. In-18 jésus; 1872 ..... 2 fr. 50 c.

ZEUNER, Professeur de Mécanique à l'École Polytechnique fédérale de Zurich. — **Théorie mécanique de la Chaleur**, avec ses APPLICATIONS AUX MACHINES. 2e édition, entièrement refondue, avec figures dans le texte et nombreux tableaux. Ouvrage traduit de l'allemand et augmenté d'un *Appendice* comprenant les travaux postérieurs à la publication du texte allemand, en particulier les importantes Recherches de M. Zeuner sur les propriétés de la vapeur d'eau surchauffée; par M. *M. Arthal*, ancien Élève de l'École des Ponts et Chaussées, et M. *Ach. Cazin*, Professeur de Physique au Lycée Condorcet. Un fort volume in-8; 1869.. . 10 fr.

1913 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Digitized by Google